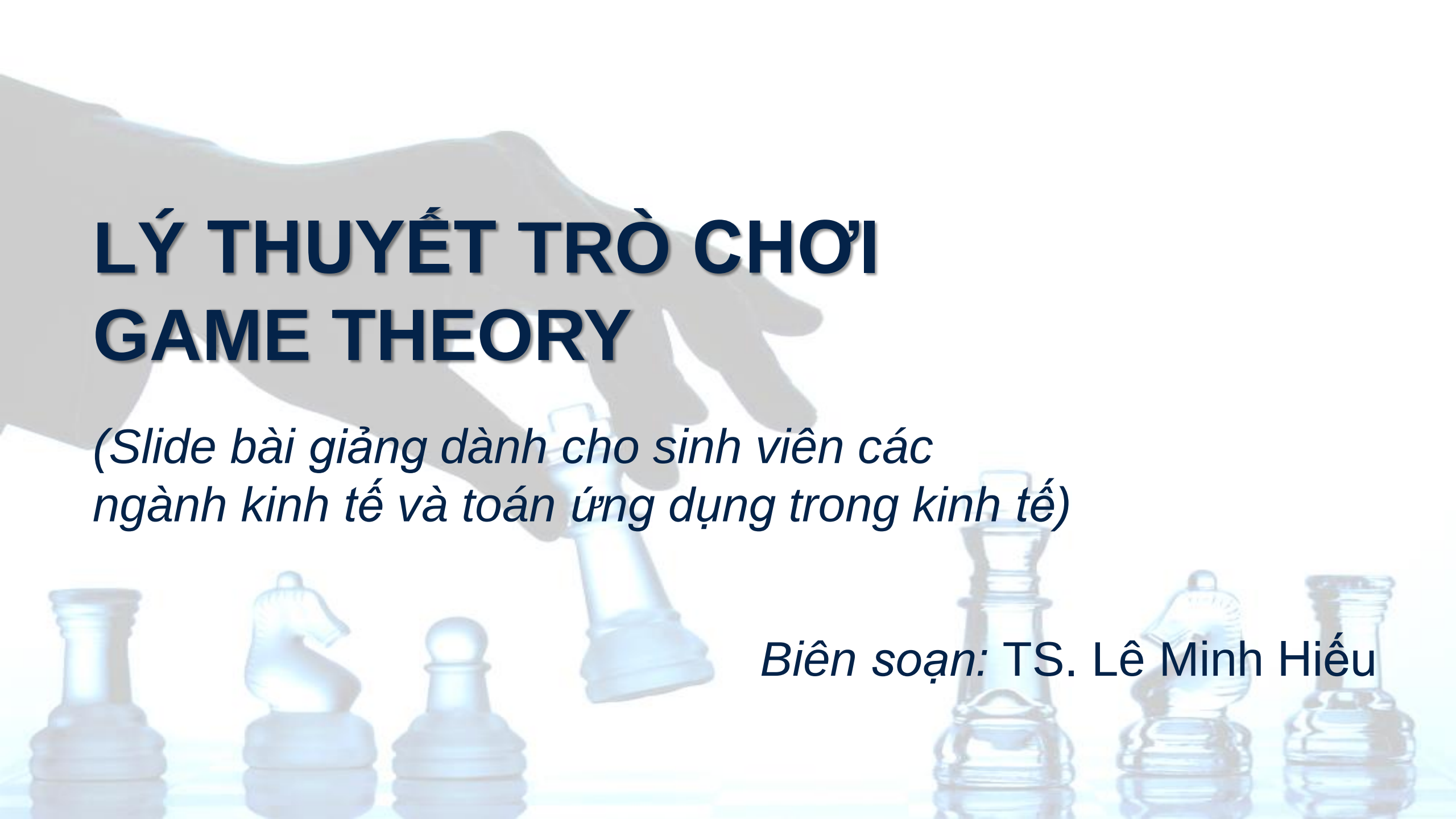


A large, semi-transparent image of a hand moving a chess piece serves as the background for the title. The hand is positioned as if it is about to move a piece, with the fingers slightly curled. The chess piece being moved is a king, and it is being lifted from its base. The background is a light blue and white checkered pattern, typical of a chessboard.

LÝ THUYẾT TRÒ CHƠI GAME THEORY

*(Slide bài giảng dành cho sinh viên các
ngành kinh tế và toán ứng dụng trong kinh tế)*

Biên soạn: TS. Lê Minh Hiếu

- ▶ TL1- *Essential of game theory*, Keyton Leyton-Brown, Morgan and Claypool Company, Inc
- ▶ TL2 - Avinash K. Dixit & Bary J. Nalebuff (2002), *Tư duy chiến lược*, Nguyễn Tiến Dũng dịch, NXB Tri thức, Hà Nội.

Tài liệu tham khảo:

- ▶ TK1 - Durlauf, S. (2010). *Game theory*. Basingstoke, Hampshire [u.a.]: Palgrave Macmillan.
- ▶ TK2 - Kelman, M. (1999). *Strategy or principle?*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

TÀI LIỆU

- ▶ Chương 1: Khái niệm cơ bản
- ▶ Chương 2: Trò chơi 2 người tổng 0 hữu hạn
- ▶ Chương 3: Trò chơi 2 người hữu hạn
- ▶ Chương 4: Một số bài toán điển hình trong kinh tế
- ▶ Chương 5: Trò chơi dạng mở rộng hữu hạn
- ▶ Chương 6: Trò chơi lặp lại

NỘI DUNG

- 
- A grayscale image of a hand moving a chess piece, with other pieces visible in the foreground.
- ▶ **1.1. Khái niệm môn học**
 - ▶ **1.2. Các yếu tố của trò chơi**
 - ▶ **1.3. Trò chơi tĩnh và động**
 - ▶ **1.4. Thông tin của trò chơi**

CHƯƠNG 1 – KHÁI NIỆM CƠ BẢN

A grayscale image of chess pieces on a board, including a king, queen, knight, and pawns.

Lý thuyết trò chơi (LTTC) là gì?

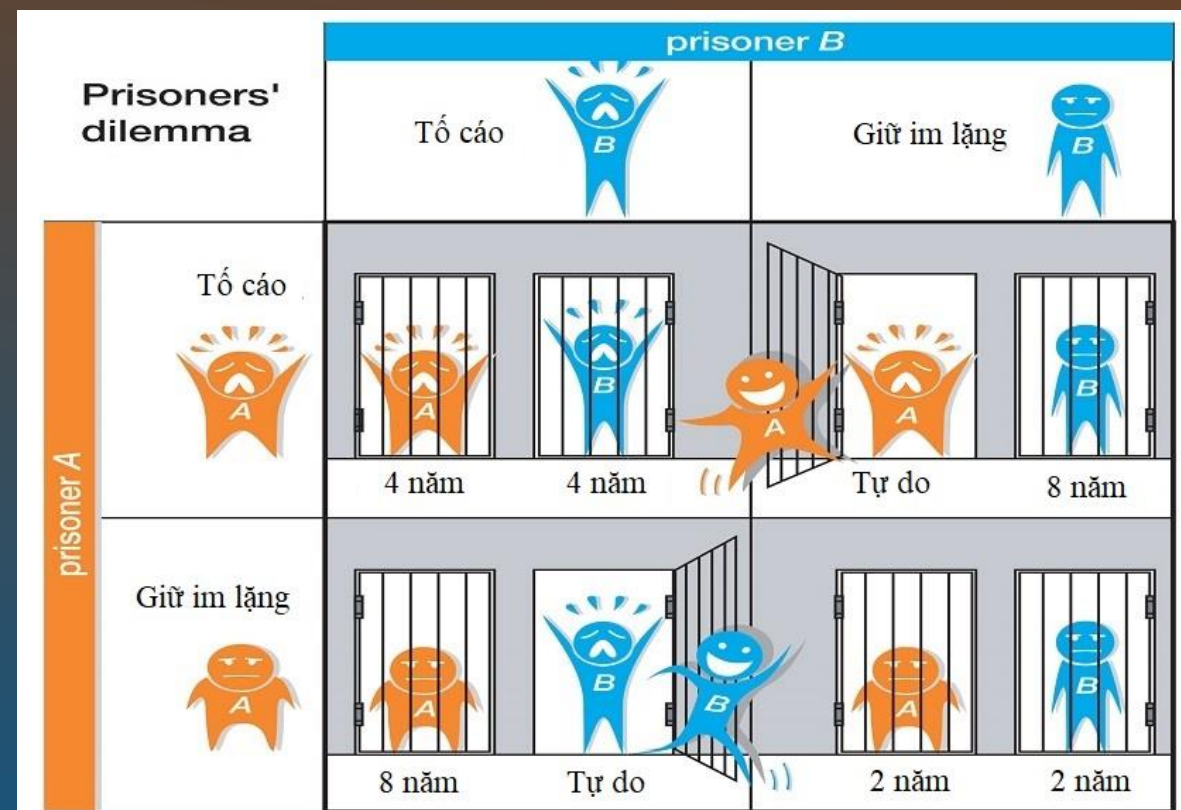
- ▶ Là hệ thống nghiên cứu về các mô hình toán học đặc tả sự xung đột và hợp tác giữa “các cá nhân ra quyết định một cách khôn ngoan”;
- ▶ Gọi là lý thuyết, bởi vì lĩnh vực này cung cấp các kỹ thuật toán học để phân tích các tình huống trong đó hai cá nhân, hoặc đông hơn nữa, tiến hành ra quyết định, mà các quyết định đó gây ảnh hưởng lên lợi ích của (những) người khác có mặt trong tình huống (trò chơi);
- ▶ Khái niệm “trò chơi” ở đây chỉ là quy ước về mặt ngôn ngữ, nhằm ám chỉ bất kỳ tình huống xã hội nào có liên quan tới ít nhất 2 người. Do cách gọi, các cá nhân liên quan tới một trò chơi thì đều được gọi là “người chơi”.
- ▶ Điều kiện để nghiên cứu là 2 giả thuyết: người chơi có tính hợp lý và người chơi sử dụng trí khôn để ra quyết định.

1.1. KHÁI NIỆM MÔN HỌC

- ▶ Hai người bị bắt, thẩm vấn riêng, không được trao đổi với nhau
- ▶ Nếu cả hai cùng nhận tội, mỗi người 6 tháng tù
- ▶ Nếu cả hai cùng chối, mỗi người 1 tháng tù
- ▶ Nếu người này nhận, người kia chối, thì người nhận được thả ngay, người chối 9 tháng tù
- ▶ Câu hỏi: Hành động nào là tốt nhất cho mỗi người tù, nếu cả hai đều lý trí?

Nạn đề hai người tù		Người 2	
		Chối	Nhận
Người 1	Chối	-1 , -1	- 9 , 0
	Nhận	0 , - 9	- 6 , - 6

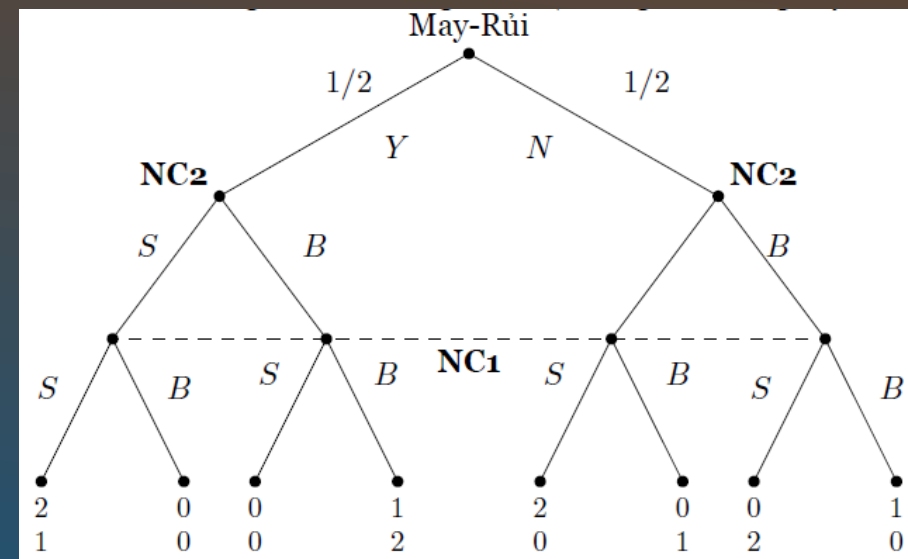
VÍ DỤ 1: BÀI TOÁN THẾ LƯƠNG NAN CỦA NGƯỜI TÙ (1950)



- ▶ Tình huống xảy ra giữa một chàng trai và một cô gái, muốn hẹn gặp nhau, hoặc xem một trận bóng đá, hoặc dự một buổi diễn ba-lê. Hai người đều không nhớ về quyết định đi đâu trong lần hẹn. Họ ở khác chỗ nhau và phải tự quyết định đi đâu; dĩ nhiên giả sử không có phương tiện thông tin để liên lạc. Mục tiêu chính là phải gặp được nhau. Chàng trai thích bóng đá hơn, ngược lại cô gái thích ba-lê hơn.
- ▶ Trong bài toán này, NC1 không biết liệu NC2 (cô gái) muốn hò hẹn với anh ta hay không, nghĩa là không thể chắc chắn bản thân mình muốn lựa chọn *Yes* hay *No*. Mô hình được viết lại cho tính bất trắc chiến lược này như sau:

$$Y : \begin{matrix} & S & B \\ S & (2, 1) & (0, 0) \\ B & (0, 0) & (1, 2) \end{matrix} \quad N : \begin{matrix} & S & B \\ S & (2, 0) & (0, 2) \\ B & (0, 1) & (1, 0) \end{matrix}$$

Trong đó, *S* là đi xem đá bóng (viết tắt chữ Soccer) và *B* là ba-lê. Chàng trai là người chơi theo hàng (NC1) và cô gái theo cột (NC2).



VÍ DỤ 2: XUNG ĐỘT SỞ THÍCH GIỚI TÍNH

Gồm 4 yếu tố cơ bản:

(1) Người chơi:

- ▶ Là tác nhân có thể quyết định và nhận các kết quả của quyết định (người, công ty, ...)
- ▶ Tập người chơi $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $n > 1$
- ▶ Tập người chơi có thể hữu hạn hoặc vô hạn



1.2. CÁC YẾU TỐ CỦA TRÒ CHƠI

(2) Chiến lược:

- ▶ Mỗi người chơi có các kế hoạch hành động khả thi, gọi là chiến lược
- ▶ Tất cả chiến lược của người chơi thứ i tạo thành một không gian chiến lược, kí hiệu là S_i
- ▶ Mỗi chiến lược kí hiệu là s_i : $s_i \in S_i$
- ▶ Tập hợp không gian chiến lược: $S = S_1 \times \dots \times S_n$
- ▶ Vecto chiến lược $(s_1 \times \dots \times s_n)$ của các người chơi gọi là một danh mục chiến lược
- ▶ Khi đó: $(s_1 \times \dots \times s_n) \in S$
- ▶ Phân loại: hai loại chiến lược: chiến lược hoàn hảo và chiến lược thông minh. Chiến lược hoàn hảo là chiến lược mà sẽ đem lại lợi ích cao nhất cho người tham gia cuộc chơi, không phụ thuộc vào hành động phản ứng của đối phương. Nói đơn giản là cho dù đối thủ có làm gì đi nữa, thì phần thắng vẫn thuộc về mình. Ngược lại, chiến lược thông minh hướng tới mục tiêu giảm thiểu mức độ rủi ro cho người tham gia cuộc chơi. Nói đơn giản là chiến lược này giúp người chơi chọn đường đi nào tới đích an toàn với rủi ro thấp nhất.

4 YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA TRÒ CHƠI





(3) Thu hoạch (payoff):

- ▶ Khi người chơi i chọn chiến lược s_i và những người chơi khác chơi chiến lược của họ, mỗi người có một lợi ích thu được vào cuối trò chơi, gọi là thu hoạch, kí hiệu là u_i
- ▶ Thu hoạch là một hàm: $u_i : S \rightarrow R$
- ▶ Người chơi là lý trí/sáng suốt nếu họ chỉ hành động với mục tiêu đạt thu hoạch tối đa

4 YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA TRÒ CHƠI



(4) Luật chơi (rule):

- ▶ Tập hợp tất cả các quy tắc, cách thức người chơi hành động, những gì họ được biết

Quay lại với bài toán thế lưỡng nan của người tù

- ▶ Người chơi: $N = \{1, 2\}$; chiến lược: $S_1 = S_2 = \{\text{chối, nhận}\}$
- ▶ Thu hoạch: số tháng tù mỗi người nhận được khi họ chọn nhận hoặc chối, tương ứng với người kia chọn nhận hoặc chối.
- ▶ Luật chơi: cả hai chọn cùng lúc

4 YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA TRÒ CHƠI

Trò chơi tĩnh:

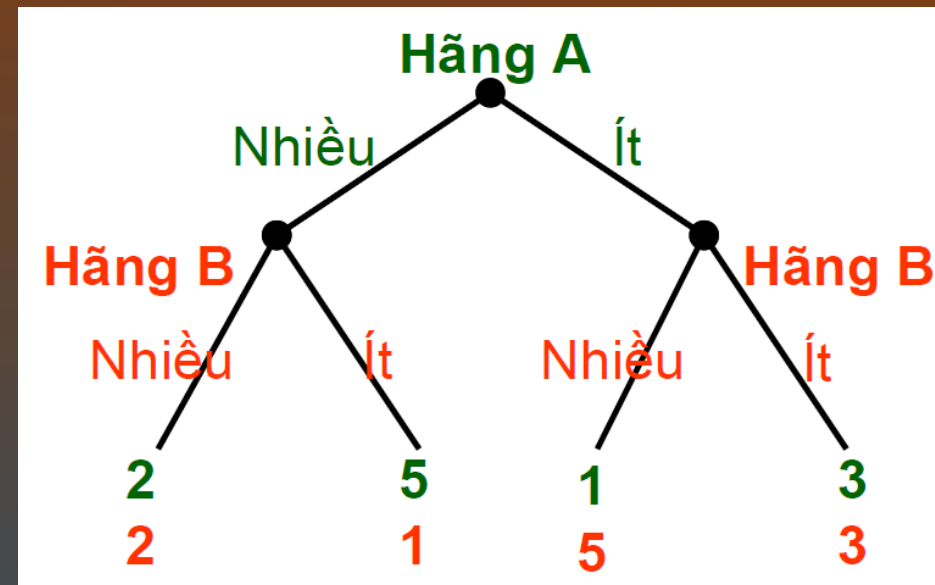
- ▶ Các người chơi lựa chọn chiến lược hành động cùng lúc
- ▶ Trò chơi tĩnh với hai người chơi có thể được mô tả dưới dạng ma trận hoặc dạng cây, dạng ma trận phổ biến hơn

Nạn đề hai người tù		Người 2	
		Chối	Nhận
Người 1	Chối	-1 , -1	- 9 , 0
	Nhận	0 , - 9	- 6 , - 6

1.4. TRÒ CHƠI TĨNH VÀ ĐỘNG

Trò chơi động:

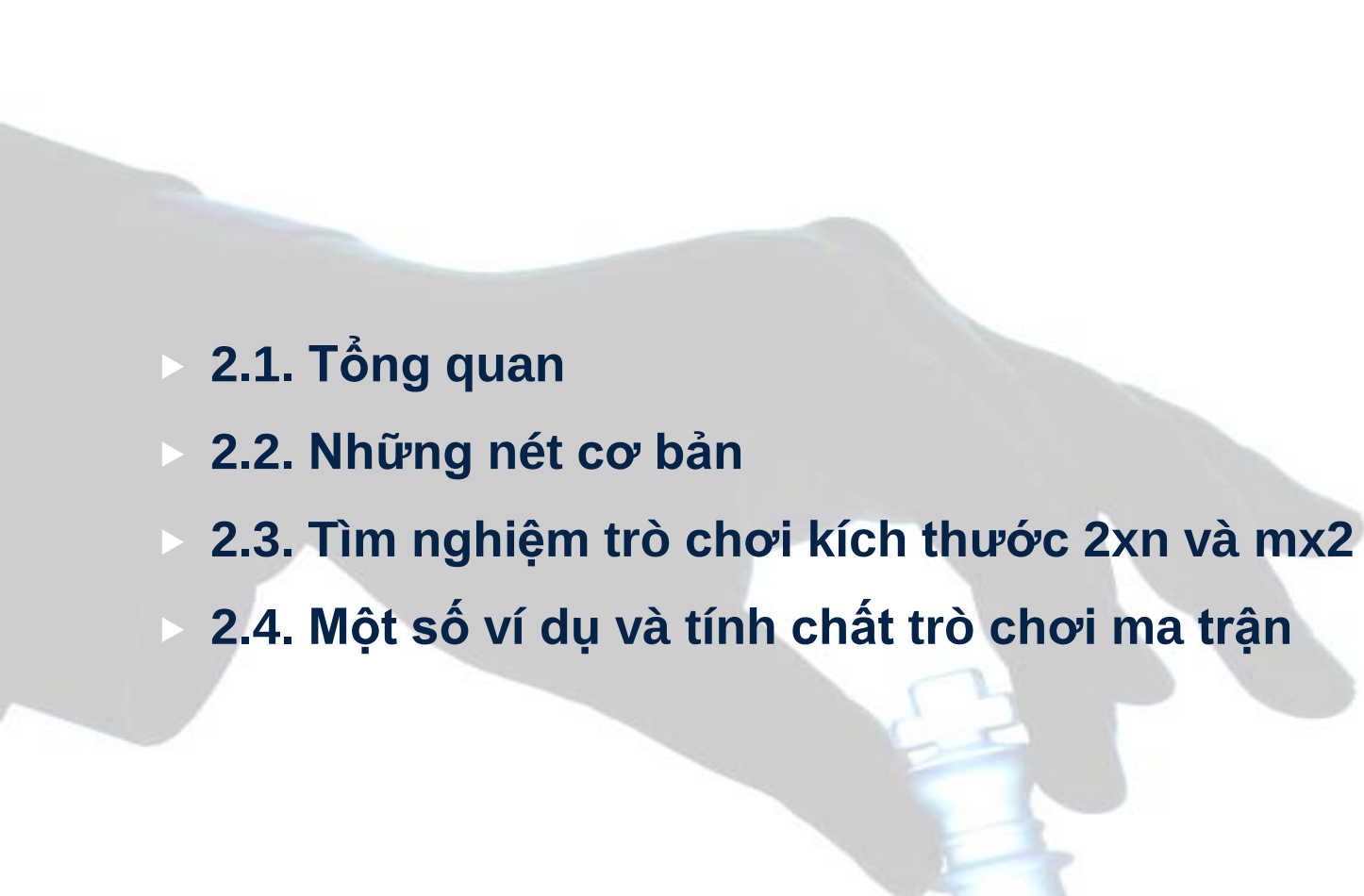
- ▶ Các người chơi hành động có thứ tự, người hành động sau có thể quan sát hoặc không quan sát được hành động của người trước
- ▶ Trò chơi động thường được mô tả dưới dạng mở rộng, dạng cây
- ▶ Một cây gồm nút và cung, thu hoạch được viết ở cuối các cung cuối cùng
- ▶ Ví dụ trò chơi dạng cây: trò chơi của hai hãng A và B trong chiến lược quảng cáo Nhiều hay Ít



1.4. TRÒ CHƠI TĨNH VÀ ĐỘNG

- ▶ **Kiến thức chung** (*common knowledge*): những thông tin mà tất cả người chơi đều biết
- ▶ **Thông tin đầy đủ** (*complete information*): mỗi người chơi đều biết về (a) tập hợp người chơi, (b) không gian chiến lược của các đối thủ, (c) hàm thu hoạch của các đối thủ
- ▶ **Thông tin không đầy đủ** (*imcomplete information*): khi có ít nhất một người chơi không biết về ít nhất một trong: (a) hoặc (b) hoặc (c)
- ▶ **Thông tin hoàn hảo** (*perfect information*) trong trò chơi động, mỗi người chơi sau đều sẽ được biết về hành động của tất cả người chơi trước đó
- ▶ **Thông tin không hoàn hảo** (*imperfect information*) trong trò chơi động, ít nhất một người chơi sau sẽ không biết về hành động của ít nhất một người chơi trước đó

1.5. THÔNG TIN

- 
- A grayscale image of a hand moving a chess piece, with other chess pieces visible in the foreground and background.
- ▶ 2.1. Tổng quan
 - ▶ 2.2. Những nét cơ bản
 - ▶ 2.3. Tìm nghiệm trò chơi kích thước $2 \times n$ và $m \times 2$
 - ▶ 2.4. Một số ví dụ và tính chất trò chơi ma trận

CHƯƠNG 2 – TRÒ CHƠI 2 NGƯỜI TỔNG 0 HỮU HẠN

Trò chơi có tổng bằng 0 (zero - sum game) là tình huống trong lý thuyết trò chơi mà người chơi cạnh tranh nhau để hưởng số phần thưởng cố định và vì vậy mà nếu người này được, thì người kia phải mất (tôi được, anh mất; tôi mất, anh được). Ví dụ, hai doanh nghiệp hoạt động trên một thị trường có dung lượng cố định (tổng nhu cầu, doanh thu không đổi). Trong tình huống này, một trong hai doanh nghiệp chỉ có thể tăng doanh thu và thị phần của mình bằng cách làm giảm doanh thu và thị phần của đối thủ cạnh tranh một cách tương ứng.



2.1. TỔNG QUAN

Trong khi **trò chơi có tổng bằng không** hàm ý rằng lợi ích của người này đồng nghĩa với thiệt hại của người khác, thì loại **trò chơi với tổng khác không** nhấn mạnh đến khả năng cùng thắng giữa các đối thủ trong một cuộc chơi, lợi ích của người này không nhất thiết là thiệt hại của người khác, mà ngược lại: mọi người tham gia cuộc chơi đều có thể giành được lợi ích tương đối cho bản thân.

2.2. NHỮNG NÉT CƠ BẢN

- ▶ Các dữ liệu của trò chơi 2 người tổng 0 hữu hạn có thể được tóm tắt vào một ma trận, do đó loại trò chơi này còn được gọi là *trò chơi ma trận*.
- ▶ Trò chơi ma trận là một ma trận A kích thước $m \times n$ chứa các số thực, với m hàng, n cột. Chiến lược chơi của người chơi số 1 (gọi tắt là **NC1**) là một phân phối xác suất $\mathbf{p}$ tương ứng với các dòng của ma trận A . Điều đó có nghĩa là, chiến lược của **NC1** là một phần tử của tập:

$$\Delta^m := \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m\}.$$

- Tương tự, chiến lược của người chơi 2 (NC2) là một PPXS $\mathbf{q}$ trên các cột của A ; tức là một phần tử của tập:

$$\Delta^n := \{\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n\}.$$

- Chiến lược $\mathbf{p}$ của NC1 gọi là “thuần” nếu chiến lược được đó lựa chọn dòng thứ i một cách chắc chắn, tức là $p_i = 1$. Chiến lược thuần này có thể ký hiệu là $\mathbf{e}^i$. Tương tự vậy, chiến lược $\mathbf{q}$ của NC2 gọi là “thuần” nếu lựa chọn cột thứ j một cách chắc chắn, tức là $q_j = 1$; ký hiệu là $\mathbf{e}^j$.

2.2. NHỮNG NÉT CƠ BẢN

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- ▶ Ý nghĩa của ma trận A như sau. Nếu NC1 chơi hàng i , tức là lựa chọn chiến lược thuần e^i , thì NC1 nhận được lợi ích tài chính a_{ij} , trong khi NC2 nhận được $-a_{ij}$ (nghĩa là trả), tương ứng vị trí dòng i và cột j trong A .
- ▶ Giả sử NC1 chơi chiến lược hỗn hợp $\mathbf{p}$ và NC2 $\mathbf{q}$, thì lợi ích của NC1 thu về tương ứng với một dãy PPXS (chính là ý nghĩa của chiến lược hỗn hợp) là: $\mathbf{p}A\mathbf{q} = \sum_m \sum_n p_i q_j a_{ij}$. Khi này NC2 nhận được $-\mathbf{p}A\mathbf{q}$ (tức là trả).
- ▶ Để giải bài toán trò chơi dạng ma trận như trên, ta cần thêm khái niệm **chiến lược maximin** và **minimax** sau đây.

CHIẾN LƯỢC MAXIMIN VÀ MINIMAX

- ▶ Chiến lược p được gọi là maximin cho NC1 trong trò chơi ma trận A nếu như:

$$\min\{pAq\} \geq \min\{p'Aq\} \quad \forall p' \in \Delta^m, q \in \Delta^n. \quad (1.1)$$

- ▶ Theo cách tương tự, chiến lược minimax q của NC2 nếu như:

$$\min\{pAq\} \leq \min\{pAq'\} \quad \forall q' \in \Delta^n. \quad (1.2)$$

- ▶ Một cách dễ hình dung, đối với NC1 chiến lược maximin là lựa chọn PPXS sao cho anh ta tối đa hóa giá trị lợi ích nhỏ nhất, tương ứng với lựa chọn của NC2. Còn minimax là lựa chọn PPXS sao cho NC2 tối thiểu hóa giá trị thiệt hại lớn nhất tương ứng với lựa chọn của NC1.
- ▶ Như vậy, để biết được lựa chọn p có phải chiến lược maximin hay không, chỉ cần kiểm tra sự thỏa mãn dấu $\geq$ của bất đẳng thức (1.1) với các chiến lược thuần e_j , với từng giá trị $j = 1, 2, \dots, n$.

CHIẾN LƯỢC MAXIMIN VÀ MINIMAX

- ▶ Nhà toán học Von Neumann chứng minh rằng với mọi trò chơi ma trận A , sẽ tồn tại một trị số $v = v(A)$ có tính chất như sau:
 1. Chiến lược p của NC1 đảm bảo thu về lợi ích tối thiểu v cho NC1, nghĩa là $pAq \geq v$ bất kể NC2 lựa chọn chiến lược q nếu và chỉ nếu p là chiến lược maximin.
 2. Chiến lược q của NC2 đảm bảo chỉ phải chi phí tối đa v mà NC2 phải trả NC1, nghĩa là $pAq \leq v$ bất kể NC1 lựa chọn chiến lược p nào, nếu và chỉ nếu q là chiến lược minimax.
- ▶ Trong thuật ngữ của chúng ta, $v = v(A)$ được gọi là giá trị của trò chơi A . Các chiến lược maximin và minimax như vừa nói được gọi là các chiến lược tối ưu tương ứng với NC1 và NC2. Khi nói rằng 'giải bài toán' trò chơi A nghĩa là ta ám chỉ việc xác định các chiến lược tối ưu, đồng thời cả giá trị của trò chơi.

ĐIỂM YÊN NGỰA

- ▶ Một vị trí xác định bởi cặp (i, j) trong ma trận A được gọi là **điểm yên ngựa - saddlepoint** - nếu như $a_{ij} \geq a_{kj}$ với mọi giá trị $k = 1, \dots, m$, và $a_{ij} \leq a_{ik}$ với mọi $k = 1, \dots, n$.
- ▶ Giá trị tại điểm yên ngựa a_{ij} có ý nghĩa là điểm có giá trị lớn nhất trong cột j và nhỏ nhất trong hàng i . Từ đó ta thấy rằng, nếu (i, j) là điểm yên ngựa, thì NC1 có thể đảm bảo nhận được giá trị lợi ích tối thiểu a_{ij} bằng cách chơi chiến lược thuần theo dòng i , tức là e^i . Tương tự, NC2 đảm bảo chỉ phải trả tối đa $-a_{ij}$ bằng cách lựa chọn chiến lược thuần cột e^j .
- ▶ Theo suy luận này, a_{ij} chắc chắn phải là giá trị của trò chơi A , $v(A) = a_{ij}$, đồng thời e^i là chiến lược minimax tối ưu của NC2, e^j mà maximin tối ưu của NC1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

TÍNH CHẤT CỦA ĐIỂM YÊN NGỰA

Tính chất 9. Cho A là một trò chơi ma trận $m \times n$. Hãy chỉ ra rằng bất kỳ 2 điểm yên ngựa nào cũng có cùng giá trị, nghĩa là nếu (i, j) và (k, l) là hai điểm yên ngựa, thì $a_{ij} = a_{kl}$.

Tính chất 10. Nếu $A_{(4 \times 4)}$ là trò chơi trong đó $(1, 1)$ và $(4, 4)$ là các điểm yên ngựa. Chứng minh rằng, A có ít nhất 2 điểm yên ngựa khác nữa.

Ví dụ 11. Hãy tìm một ví dụ trò chơi ma trận kích thước (4×4) có chính xác 3 điểm yên ngựa.

2.3. NGHIỆM CỦA TRÒ CHƠI 2XN VÀ MX2

Giải các trò chơi 2xn

- Xét trò chơi 2-dòng và n-cột, với một ma trận A bằng số cụ thể có kích thước 2×4 .

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ta đặt các chiến lược thuần theo cột lần lượt là } e^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ và } e^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Các chiến lược thuần trên là của NC2 (do lấy theo cột). Bây giờ, ta xét chiến lược chơi hỗn hợp $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ bất kỳ của NC1. Thiết lập các mức lợi ích kỳ vọng NC1 thu được tương ứng với mỗi chiến lược thuần ở trên của NC2, ta sẽ có một hệ thống như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}A\mathbf{e}^1 &= 10p + 2(1 - p) \\ \mathbf{p}A\mathbf{e}^2 &= 2p + 10(1 - p) \\ \mathbf{p}A\mathbf{e}^3 &= 4p + 8(1 - p) \\ \mathbf{p}A\mathbf{e}^4 &= p + 12(1 - p) \end{aligned}$$

2.3. NGHIỆM CỦA TRÒ CHƠI 2XN VÀ MX2

Giải các trò chơi 2xn

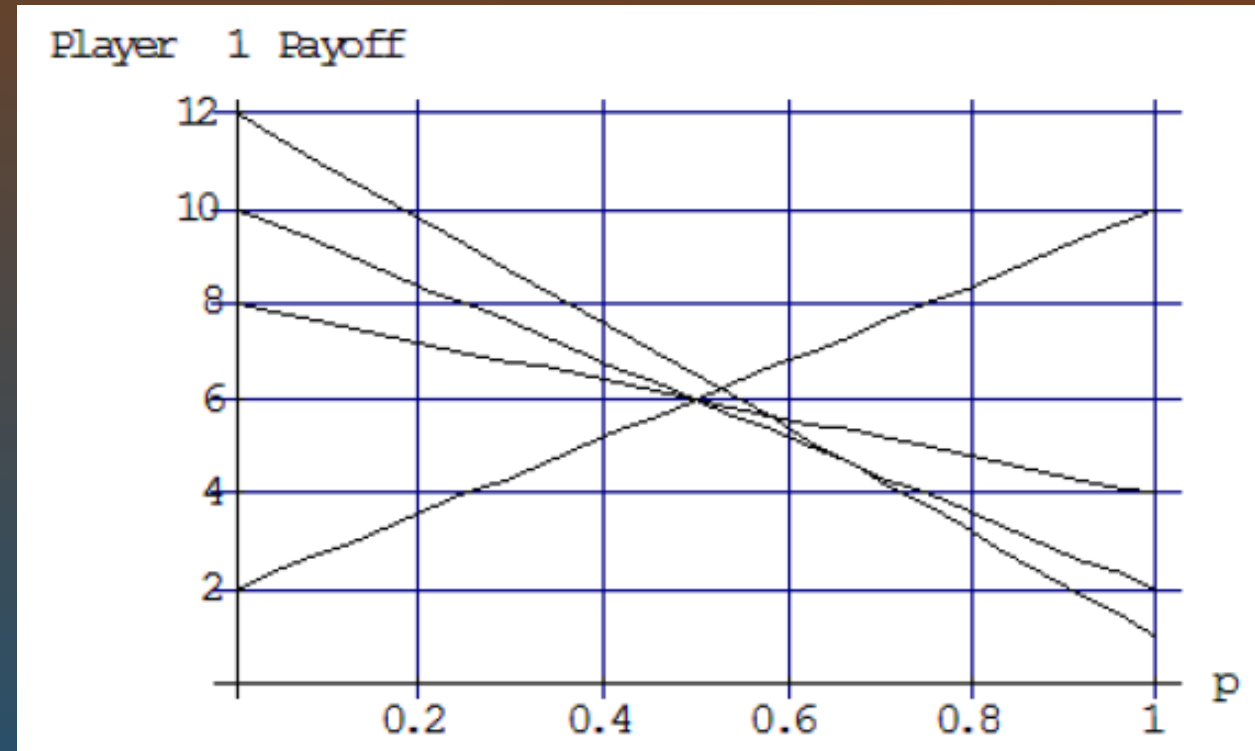
- Sử dụng Mathematica vẽ đồ thị hệ các phương trình tuyến tính ở trên ta có:

$$\begin{aligned}pAe^1 &= 10p + 2(1 - p) \\pAe^2 &= 2p + 10(1 - p) \\pAe^3 &= 4p + 8(1 - p) \\pAe^4 &= p + 12(1 - p)\end{aligned}$$

Có 4 điểm đáng chú ý của đồ thị này là:

$(0,2)$, $(1/2, 6)$, $(20/21, 32/21)$, $(1, 1)$.

Đây là các điểm mà khi nối lại, ta thu được đường bao đáy của miền tạo bởi toàn bộ 4 đoạn thẳng trong khoảng $p = [0, 1]$ như đã nói. Khi $p = 1/2$ cũng là lúc toàn bộ hệ này thu được giá trị maximin là 6, và đây cũng là giá trị của trò chơi $v(A) = 6$.

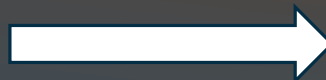


2.3. NGHIỆM CỦA TRÒ CHƠI 2XN VÀ MX2

Đó là với NC1, còn các chiến lược tối ưu minimax của NC2 sẽ có hình dạng ra sao?

- ▶ Trước tiên, dạng tổng quát của chiến lược minimax cho NC2 là $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$. Lợi dụng việc xác định được $v(A) = 6$, ta sẽ loại được q_4 do $q_4 = 0$, vì nếu như $q_4 > 0$ thì chi phí của việc chơi chiến lược thuần e^4 là $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 12 > 6$, điều này mâu thuẫn với nhận thức lúc trước rằng NC2 chỉ trả nhiều nhất là bằng $v(A)$.
- ▶ Tiếp tục lợi dụng $v(A) = 6$ và $p^* = 1/2$ đã biết, sau khi biết $q_4 = 0$, ta lại thu được một hệ:

$$\begin{aligned} 6 &= 10q_1 + 2q_2 + 4q_3 \\ 6 &= 2q_1 + 10q_2 + 8q_3 \\ 1 &= q_1 + q_2 + q_3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 1 &= 3q_1 - q_2 \\ 1 &= q_1 + q_2 + q_3 \end{aligned}$$

Từ đây có thể thấy rằng, khi $q_1 = 1/3 \rightarrow q_2 = 0$, và $q_1 = 1/2 \rightarrow q_2 = 1/2$. Cả q_1, q_2 đều không thể lớn hơn $1/2$. Ràng buộc với q_3 không xác định. Tập hợp các chiến lược tối ưu cho NC2 có dạng:

$$\{\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4) \mid \frac{1}{3} \leq q_1 \leq \frac{1}{2}, q_2 = 3q_1 - 1, q_4 = 0\}.$$

2.3. NGHIỆM CỦA TRÒ CHƠI 2XN VÀ MX2

Giải các trò chơi mx2

► Giả sử ta chuyển vị ma trận 2×4 vừa rồi thành trò chơi 4×2 có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \\ 4 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Bây giờ ta viết lại dạng các chiến lược thuần $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, 4$: $\mathbf{e}_1 = (10, 2)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 10)$, $\mathbf{e}_3 = (4, 8)$, $\mathbf{e}_4 = (1, 12)$. Thực ra, đây là cách xử lý để đưa đầu bài về dạng dễ giải quyết hơn, do với số cột $n = 2$, ta lại có tình huống NC2 có chiến lược với PPXS đơn giản, dạng tương tự khi trước $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$.

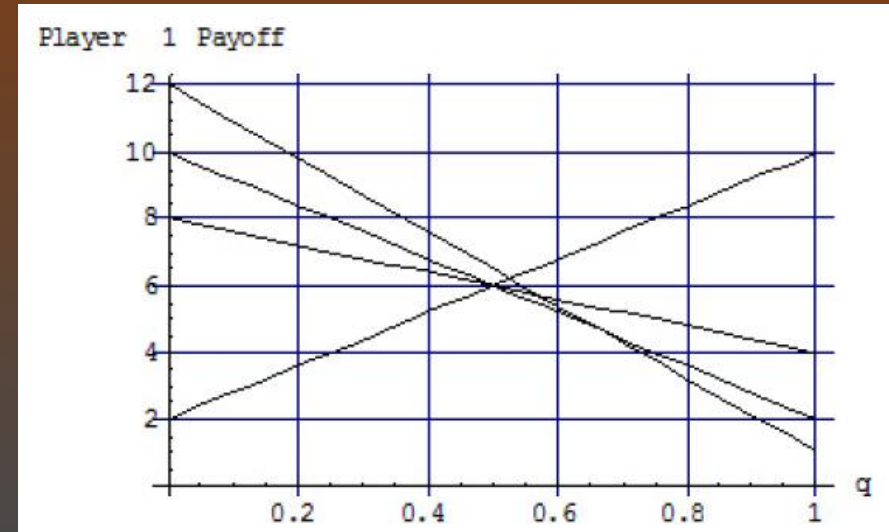
Tiếp theo, ta thiết lập hệ các lợi ích cho NC1, tương ứng với chiến lược $\mathbf{q}$ của NC2, nếu NC1 chơi chiến lược thuần $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, 4$.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 A \mathbf{q} &= 10q + 2(1 - q) = 8q + 2 \\ \mathbf{e}^2 A \mathbf{q} &= 2q + 10(1 - q) = 10 - 8q \\ \mathbf{e}^3 A \mathbf{q} &= 4q + 8(1 - q) = 8 - 4q \\ \mathbf{e}^4 A \mathbf{q} &= q + 12(1 - q) = 12 - 11q \end{aligned}$$

2.3. NGHIỆM CỦA TRÒ CHƠI 2XN VÀ MX2

Giải các trò chơi mx2

- Ta nhận thấy 3 điểm đáng chú ý là các điểm tạo thành đường bao phía trên của vùng xác định bởi các đoạn thẳng của hệ phương trình trên $(0, 12)$, $(10/19, 118/19)$, $(1, 10)$. Trong các điểm có giá trị lớn nhất nằm trên đường bao đi qua 3 điểm này, điểm có trị số nhỏ nhất là $(10/19, 118/19)$, điểm giao nhau giữa đường $12 - 11q$ và $8q + 2$. Đây cũng là điểm cho biết chiến lược giá trị phải trả minimax tối ưu cho NC2.



Giá trị của trò chơi là $118/19$, và tương ứng với nó là chiến lược minimax tối ưu với NC2 là $q^* = (10/19, 9/19)$.

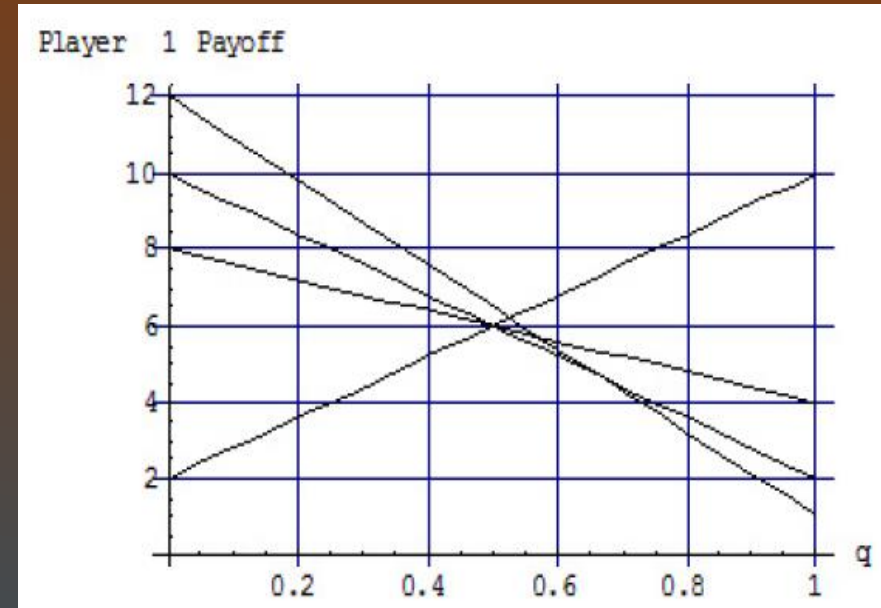
Tiếp theo là nhiệm vụ xác định chiến lược tối ưu cho NC1 $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, tận dụng kết quả đã biết của q^* và $v(A) = 118/19$. Dựa trên đồ thị ở trên, $p_2 = p_3 = 0$, do hai đường này nằm dưới đường bao phía trên tạo bởi $e^1 A q$ và $e^4 A q$.

2.3. NGHIỆM CỦA TRÒ CHƠI 2XN VÀ MX2

Giải các trò chơi mx2

- Như vậy, cần tìm một phép kết hợp giữa e^1 và e^4 sao cho chiến lược này tạo ra lợi ích không nhỏ hơn $118/19$ với mọi giá trị q . Điều kiện này dẫn tới việc khai triển p theo hai cột của A như sau:

$$\begin{aligned}10p_1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + p_2 &= \frac{118}{19} \\2p_1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 12p_2 &= \frac{118}{19} \\p_1 + 0 + 0 + p_4 &= 1\end{aligned}$$



Ta tìm được cặp nghiệm duy nhất, và là chiến lược maximin cho NC1 dưới đây

```
In[17]:= Solve[{10 p1 + p4 == 118/19, 2*p1 + 12*p4 == 118/19},  
              {p1, p4}]  
Out[17]={{p1 -> 11/19, p4 -> 8/19}}
```

Rõ ràng $p_1 + p_4 = 1$ cũng thỏa mãn nốt điều kiện thứ 3. Cuối cùng, ta kết luận chiến lược tối ưu maximin - và cũng là duy nhất - cho NC1 có dạng $(11/19, 0, 0, 8/19)$.

2.4. TÍNH TRỘI TUYỆT ĐỐI

- ▶ Tính trội tuyệt đối (strict domination) là một kỹ thuật nhằm giúp việc phân tích nghiệm của một TC được thuận lợi hơn, thông qua việc loại bỏ bớt các chiến lược thuần không thích hợp. Trước hết, ta xét khái niệm.
- ▶ **Tính trội tuyệt đối.** Gọi A là một trò chơi ma trận kích thước $m \times n$ và i là một dòng (hàng) của A . Một chiến lược thuần $\mathbf{e}^i$ gọi là lép vế (strictly dominated) nếu như tồn tại một chiến lược hỗn hợp $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta^m$ với $p_i = 0$ sao cho $\mathbf{p}A\mathbf{e}^j > \mathbf{e}^iA\mathbf{e}^j$, với mọi $j = 1, \dots, n$.
- ▶ Tương tự như vậy, gọi j là một cột của A . Chiến lược thuần $\mathbf{e}^j$ gọi là lép vế nếu tồn tại $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta^n$ với $q^j = 0$ sao cho: $\mathbf{e}^iA\mathbf{q} < \mathbf{e}^iA\mathbf{e}^j$, với mọi $i = 1, \dots, m$.
- ▶ Để làm rõ khái niệm này, chúng ta xét minh họa bằng ví dụ số sau. Cho ma trận $A_{3 \times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. TÍNH TRỘI TUYỆT ĐỐI

- ▶ Theo quy ước, NC1 chơi theo hàng. Giả sử PPXS tạo thành chiến lược hỗn hợp của NC1 là $\mathbf{p} = (7/12, 5/12, 0)$. Theo định nghĩa, ta thực hiện phép tính:

$$\mathbf{p} \cdot A = \left(\frac{7}{12} \quad \frac{5}{12} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Thực hiện phép nhân này trong môi trường Mathematica, ta thu được kết quả $\mathbf{p} \cdot A = (7/2, 25/12, 17/6)$. Rõ ràng, $\mathbf{p} \cdot A > \mathbf{e}^3 A$ bất kể PPXS $\mathbf{q}$ ra sao. $\mathbf{e}^3$ lép vế, và dòng 3 có thể loại khỏi trò chơi, ta thu được:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. TÍNH TRỘI TUYỆT ĐỐI

- Bây giờ ta xét tiếp chiến lược $\mathbf{q} = (1/4, 3/4, 0)$. Tính $B \cdot \mathbf{q}$ qua Mathematica, ta thu được:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = B \cdot \mathbf{e}^3$$

- Từ đây suy ra, NC2 sẽ không sử dụng phương án chơi cột 3, và ma trận tiếp tục được rút gọn còn:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ở dạng ma trận rút gọn đơn giản này, việc giải bài toán trở nên thuận lợi và nhanh chóng. Bản thân trò chơi C không có điểm yên ngựa, do đó sẽ không có chiến lược thuần cho NC1 đảm bảo tính chất maximin. Xét PPXS $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ với từng chiến lược thuần của NC2, ta dễ dàng thu được $\mathbf{pAe}^1 = 6p$ và $\mathbf{pAe}^2 = 5 - 5p$, và giải ra được:

```
In[24] := Solve[6*p==5-5*p,p]
```

```
Out[24] = {{p \[Rule] 5/11}}
```

2.4. TÍNH TRỘI TUYỆT ĐỐI

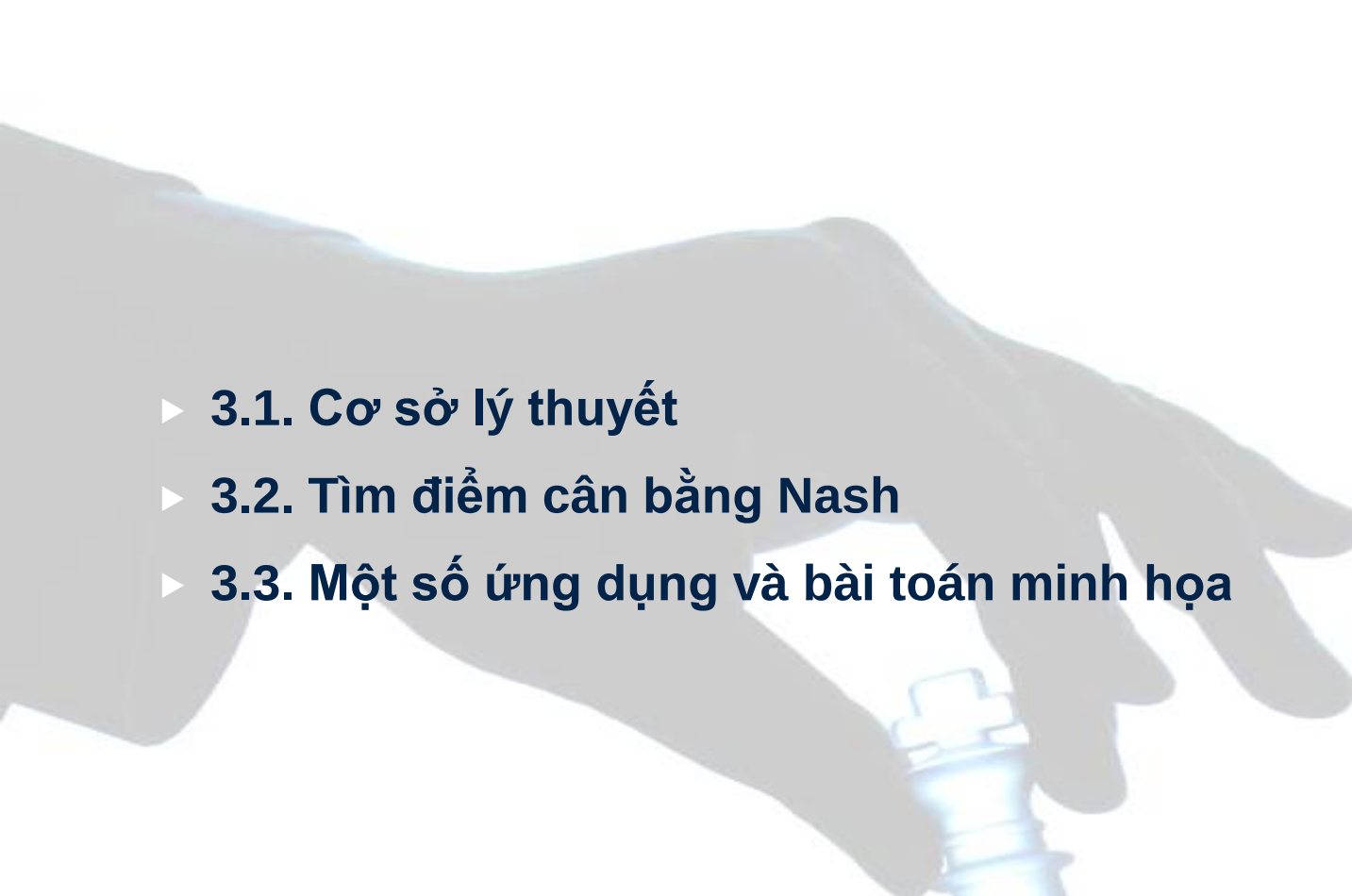
Như vậy $\mathbf{p} = (\frac{5}{11}, \frac{6}{11})$, tương ứng $v(A) = \frac{30}{11}$.

Tương tự vậy, ta xét tiếp chiến lược cho NC2, thông qua xét $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$, và ta sẽ thu được kết quả hoàn toàn trùng khớp (do tính chất đối xứng qua trục chuyển vị: $\mathbf{q} = (\frac{5}{11}, \frac{6}{11})$). Hiển nhiên giá trị trò chơi vẫn là $v(A) = \frac{30}{11}$.

- Giải bài toán trò chơi ma trận A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- 
- A large, semi-transparent image of a hand moving a chess king piece, serving as a background for the list.
- ▶ **3.1. Cơ sở lý thuyết**
 - ▶ **3.2. Tìm điểm cân bằng Nash**
 - ▶ **3.3. Một số ứng dụng và bài toán minh họa**

CHƯƠNG 3 – TRÒ CHƠI 2 NGƯỜI HỮU HẠN

A row of chess pieces (king, queen, knight, rook) on a checkered board, positioned at the bottom of the slide.

3.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

- ▶ Dữ liệu cho bài toán trò chơi 2-người với số chiến lược thuần hữu hạn được trình bày qua 2 ma trận, thường được ghép vào làm một - ta sẽ gọi là ma trận cặp (bimatrix).
- ▶ **Định nghĩa.** Một trò chơi ma trận cặp (bimatrix) là một cặp ma trận có kích thước $m \times n$ ký hiệu (A, B) .
- ▶ Cách hiểu trò chơi (A, B) như sau. Nếu như NC1 (theo quy ước là chơi theo hàng, hoặc dòng) mà chơi hàng (i) và NC2 chơi cột j , thì NC1 nhận lợi ích a_{ij} , và NC2 nhận b_{ij} , là các phần tử tương ứng của A và B . Các ý niệm và ký hiệu với chiến lược thuần và hỗn hợp, tập hợp chiến lược và lợi ích kỳ vọng vẫn giống như bài toán ma trận ở chương trước.
- ▶ Vấn đề trung tâm cần lưu ý với các bài toán thuộc lớp trò chơi bất hợp tác (noncooperative game) là khái niệm *phản ứng tối ưu* (best reply). Ý niệm của phản ứng tối ưu trước hết có thể diễn đạt bằng lời như sau. Một NC có tính toán hợp lý và vị lợi sẽ luôn tìm cách tối đa hóa lợi ích kỳ vọng của mình, thông qua hiểu biết hay phỏng đoán cá nhân về các chiến lược mà đối thủ có thể lựa chọn.

3.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

- ▶ **Khái niệm phản ứng tối ưu.** Chiến lược p của NC1 gọi là phản ứng tối ưu với chiến lược q của NC2 trong một trò chơi bimatrix kích thước $m \times n$ - ký hiệu là (A, B) nếu $pAq \geq p'Aq$ với mọi $p' \in \Delta^m$.
- ▶ Tương tự như trên, q được gọi là phản ứng tối ưu với chiến lược p của NC1 nếu như $pBq \geq pBq'$ với mọi $q' \in \Delta^n$.
- ▶ Kết luận đáng chú về mặt lý thuyết là *tại điểm cân bằng Nash, chiến lược của mỗi NC chính là phản hồi tối ưu với người kia*. Bây giờ chúng ta xét tới định nghĩa của cân bằng Nash.
- ▶ **Cân bằng Nash.** Một cặp chiến lược, ký hiệu p^* , q^* , được gọi là cân bằng Nash nếu như p^* là phản hồi tối ưu của NC1 khi NC2 chơi chiến lược q^* , và q^* là phản hồi tối ưu của NC2 khi NC1 theo lựa chọn chiến lược p^* .
- ▶ Nếu p^* và q^* là các chiến lược thuần, thì cân bằng Nash cũng được gọi là cân bằng Nash thuần.

3.2. TÌM ĐIỂM CÂN BẰNG NASH

- ▶ Trước tiên, ta cần biết rằng, việc tìm *tất cả* các điểm cân bằng Nash của một trò chơi bimatrix bất kỳ là việc rất khó. Ở đây, trước mắt ta tạm thời giới hạn nhiệm vụ lại trong phạm vi tìm *tất cả* các cân bằng Nash thuần của trò chơi bimatrix. Tiếp theo, chúng ta xem xét việc tìm cân bằng Nash cho các bimatrix kích thước 2×2 , 2×3 , 3×2 bằng cách sử dụng đồ thị. Với các ma trận kích thước lớn hơn nữa, việc giải bằng đồ thị rất khó khăn và hầu như không thể.

Cân bằng Nash thuần

Để tìm cân bằng Nash trong trò chơi bimatrix, trước hết ta có thể xác định các phản hồi tối ưu thuần của NC2 với từng chiến lược thuần của NC1. Rồi tiếp theo, xác định các phản hồi tối ưu của NC1 với từng chiến lược thuần của NC2. Các cặp chiến lược đồng thời là phản hồi tối ưu của cả hai NC trong trò chơi chính là các điểm cân bằng Nash của trò chơi. Ta cần minh họa trò chơi sau đây để làm rõ ý tưởng vừa nêu.

3.2. TÌM ĐIỂM CÂN BẰNG NASH

	W	X	Y	Z
T	2, 2	4, 0	1, 1	3, 2
M	0, 3	1, 5	4, 4	3, 4
B	2, 0	2, 1	5, 1	1, 0

Trước tiên, ta xác định phản hồi tối ưu của NC2.

	W	X	Y	Z
T	2, 2*	4, 0	1, 1	3, 2*
M	0, 3	1, 5*	4, 4	3, 4
B	2, 0	2, 1*	5, 1*	1, 0

Tiếp theo, ta xác định phản hồi tối ưu của NC1.

	W	X	Y	Z
T	2*, 2*	4*, 0	1, 1	3*, 2*
M	0, 3	1, 5*	4, 4	3*, 4
B	2*, 0	2, 1*	5*, 1*	1, 0

3 điểm cân bằng Nash ta tìm được từ các chiến lược thuần là (T, W) , (T, Z) và (B, Y) .

- ✓ Giả sử trong bài toán trên, NC2 lựa chọn chiến lược hỗn hợp $(q, 0, 0, 1-q)$ để đáp ứng chiến lược thuần T của NC1. Lựa chọn này dẫn tới lợi ích của NC2 trong trường hợp này có giá trị $q+0+0+2(1-q) = 2$.
- ✓ Tuy vậy, chiến lược hỗn hợp này cũng không đem lại giá trị lớn hơn trường hợp chiến lược thuần $(1, 0, 0, 0)$ hay $(0, 0, 0, 1)$.
- ✓ Bên cạnh đó, chúng ta cũng có thể chỉ ra rằng, tất cả các cặp chiến lược có dạng $(T, (q, 0, 0, 1-q))$ với $0 \leq q \leq 1$ đều là các điểm cân bằng Nash của trò chơi bimatrix này.

3.2. TÌM ĐIỂM CÂN BẰNG NASH

Trò chơi bimatrix 2×2

Phần tiếp theo này đề cập cách sử dụng đồ thị để tìm nghiệm của trò chơi ma trận cặp (bimatrix) kích thước 2×2 , với trò chơi cho dưới đây.

$$(A, B) = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2, 2 & 0, 1 \\ 1, 1 & 3, 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hai điểm cân bằng Nash trong các chiến lược thuần của trò chơi (A, B) này là 2, 2 và 3, 3. Để tìm tất cả cân bằng Nash cho trò chơi này, ta đi tìm các phản ứng tối ưu của cả hai NC.

Xét tổng quát chiến lược hỗn hợp $(q, 1-q)$ của NC2. Khi nào phản ứng tối ưu của NC1 là $(1, 0)$ (tức là T)? Rõ ràng là chỉ khi lợi ích kỳ vọng thu được từ chiến lược thuần T lớn hơn khi lựa chọn B hay bất kỳ tổ hợp nào giữa T và B qua PPXS $(p, 1 - p)$. Như vậy, NC1 chọn T khi:

$$2q + 0(1 - q) > q + 3(1 - q)$$

3.2. TÌM ĐIỂM CÂN BẰNG NASH

Trò chơi bimatrix 2×2

$$2q + 0(1 - q) > q + 3(1 - q)$$

Như vậy, chọn T khi $q > 3/4$. Tương tự, khi $q < 3/4$, thì B là phản ứng tối ưu. Còn trường hợp khi lợi ích chơi T và B bằng nhau:

$$2q + 0(1 - q) = q + 3(1 - q),$$

chỉ xảy ra khi $q = 3/4$. Trong trường hợp $q = 3/4$, thì mọi chiến lược hỗn hợp dạng $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ của NC1 đều là phản ứng tối ưu. Bây giờ, ta tóm tắt lại lô-gic vừa trình bày của các phản ứng tối ưu, của NC1 và NC2.

Giả sử, gọi tập toàn bộ các phản ứng tối ưu của NC1 đối với PPXS $(q, 1 - q)$ của NC2 là $\beta_1(q, 1 - q)$, thì

$$\beta_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{nếu } \frac{3}{4} < q \leq 1 \\ \{(p, 1 - p) | 0 < p \leq 1\} & \text{nếu } q = \frac{3}{4} \\ \{(0, 1)\} & \text{nếu } 0 < q < \frac{3}{4} \end{cases} \quad (2.1)$$

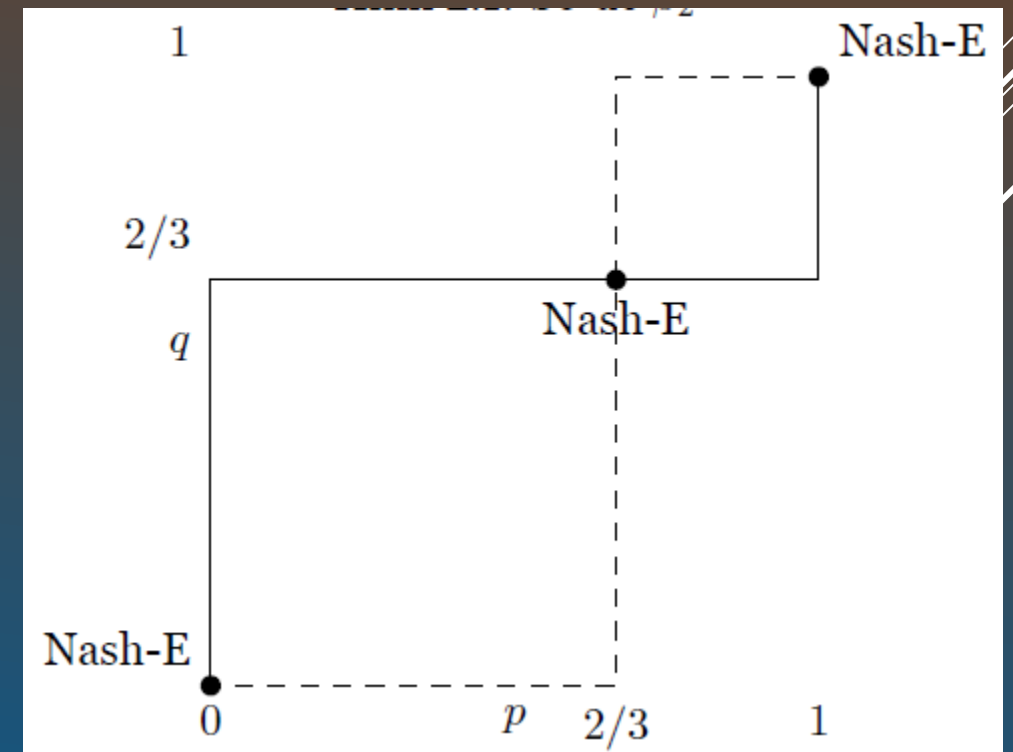
Trò chơi bimatrix 2×2

Theo cùng lô-gic, lại gọi tập các phản ứng tối ưu của NC2 đối với $(p, 1 - p)$ là $\beta_2(p, 1 - p)$, thì ta cũng có:

$$\beta_2(p, 1 - p) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{nếu } \frac{2}{3} < p \leq 1 \\ \{(q, 1 - q) | 0 < q \leq 1\} & \text{nếu } p = \frac{2}{3} \\ \{(0, 1)\} & \text{nếu } 0 < p < \frac{2}{3} \end{cases} \quad (2.2)$$

Theo cách hiểu của trò chơi, các điểm cân bằng Nash là sự kết hợp chiến lược $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$ sao cho $\mathbf{p}^* \in \beta_1(\mathbf{q}^*)$, và $\mathbf{q}^* \in \beta_2(\mathbf{p}^*)$. Như vậy, các cân bằng Nash là các điểm giao nhau giữa 2 đường đồ thị cho bởi các hàm (2.1) và (2.2).

3 điểm cân bằng Nash của trò chơi (qua 3 chấm tròn là nơi giao cắt các đường β_1, β_2 ở hình bên phải) là: $((1, 0), (1, 0))$, $((0, 1), (0, 1))$ và $((2/3, 1/3), (3/4, 1/4))$.



Trong 4 bài toán sau đây (câu 1 đến câu 4), hãy xác định:

- a. Chiến lược phản ứng tốt nhất của các người chơi (Best response)
- b. Chiến lược trội (nếu có) (Dominant strategy)
- c. Trạng thái cân bằng (Nash Equilibrium) của cuộc chơi

Lưu ý: Cách diễn giải để có được các kết quả trên.

		Công ty A	
		Dự án 1	Dự án 2
Công ty B	Dự án 1	5 , 3	6 , 4
	Dự án 2	4 , 2	5 , 3

		Công ty A	
		Giữ giá	Giảm giá
Công ty B	Giữ giá	3 , 3	1 , 40
	Giảm giá	6 , -1	0 , 0

BÀI TẬP

BÀI TẬP

Câu 3

		Công ty A	
		Thức ăn 1	Thức ăn 2
Công ty B	Thức ăn 1	100 , 100	150 , 50
	Thức ăn 2	150 , 150	50 , 25

Câu 4

		Công ty A		
		Dự án 1	Dự án 2	Dự án 3
Công ty B	Dự án 1	-2 , 3 	-1 , 1	 4 , -3
	Dự án 2	5 , -4	 2 , -3 	3 , -4
	Dự án 3	 7 , -6	-3 , 2	-4 , 6 

Tính trội tuyệt đối

- Về cơ bản, để tìm các điểm cân bằng Nash nhiều khi ta có thể rút gọn kích thước của trò chơi, thông qua loại bỏ các **chiến lược lép vế**.
- Khi loại bỏ các chiến lược thuần bị lép vế tìm được theo dòng hay cột, thì kích thước ma trận sẽ giảm dần, cho tới khi không còn tồn tại chiến lược thuần lép vế nào nữa.
- Lý thuyết đã chứng minh rõ rằng, khi làm theo cách loại trừ để giảm kích thước ma trận như vừa nêu, không có điểm cân bằng Nash nào vô tình bị loại bỏ, và cũng không có cân bằng Nash nào nảy sinh ra do giảm kích thước.
- Thứ tự của việc loại bỏ các chiến lược lép vế cũng không quan trọng, cái nào trước, cái nào sau không ảnh hưởng tới kết quả cuối cùng.

Tính trội tuyệt đối

- ✓ Về tính trội tuyệt đối, với trò chơi $(A,B)_{m \times n}$ một chiến lược thuần $\mathbf{e}^i$ tương ứng với hàng i gọi là lép vế, nếu như tồn tại một chiến lược hỗn hợp $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_i = 0, \dots, p_m)$ sao cho: $\mathbf{p}A\mathbf{e}^j > \mathbf{e}^iA\mathbf{e}^j$ với từng giá trị $j = 1, \dots, n$.
- ✓ Tương tự, chiến lược thuần $\mathbf{e}^j$ theo cột j là lép vế nếu tồn tại một PPXS $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_j = 0, \dots, q_n)$, sao cho $\mathbf{e}^iB\mathbf{q} > \mathbf{e}^iB\mathbf{e}^j$ với từng giá trị $i = 1, \dots, m$.

Rút gọn kính thước ma trận trò chơi bimatrix

Cho trò chơi ma trận bimatrix sau:

$$\begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ 2, 2 & 2, 1 & 2, 2 & 0, 0 \\ 1, 0 & 4, 1 & 2, 4 & 1, 5 \\ 0, 4 & 3, 1 & 3, 0 & 3, 3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Đầu tiên, ta nhận thấy nếu xét các chiến lược thuần theo dòng (NC1), hay theo cột (NC2), thì không có chiến lược thuần nào bị lép vế hoàn toàn so với một chiến lược thuần khác đang có. Bây giờ ra ‘dò thử’ chiến lược thuần X ; điều này như ta đã biết nghĩa là $q_2 = 1$. Hãy xem thử tồn tại một PPXS $\mathbf{q}$ nào đó có tính trội tuyệt đối so với X hay không.

Ta áp dụng cách hiểu về tính trội tuyệt đối cho trường hợp ma trận bimatrix (A, B) với bài toán (2.3). Như vậy, khi so với chiến lược X , trong PPXS $\mathbf{q}$ nào đó thích hợp thì rõ ràng $q_2 = 0$. Lại giả sử tiếp trường hợp $q_4 = 0$, khi này ta xét thử PPXS $(q, 0, 1 - q, 0)$. Ta sẽ phải thiết lập các biểu thức $\mathbf{e}iB\mathbf{q}$ rồi đặt bất đẳng thức với dấu lớn hơn khi so với từng phần tử tương ứng theo dòng của véc-tơ cột thứ 2 của B .

Rút gọn kính thước ma trận trò chơi bimatrix

$$\begin{aligned}2q + 1 \cdot 0 + 2(1 - q) + 0 \cdot 0 &> 1 \\0q + 1 \cdot 0 + 4(1 - q) + 5 \cdot 0 &> 1 \\4q + 1 \cdot 0 + 0(1 - q) + 3 \cdot 0 &> 1\end{aligned}$$

Rút gọn lại ta có được

$$\begin{aligned}2 &> 1 \\3 &> 4q \\4q &> 1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đầu tiên đương nhiên đúng. Điều kiện để 2 bất đẳng thức còn lại được thỏa mãn dễ thấy là $1/4 < q < 3/4$. Như vậy, X lép vế khi q trong khoảng giá trị vừa tính ra, và X có thể được loại khỏi trò chơi. Ta sẽ rút gọn trò chơi thành (2.4):

$$\begin{array}{c|ccc} & W & Y & Z \\ \hline T & (2, 2) & (2, 2) & (0, 0) \\ M & (1, 0) & (2, 4) & (1, 5) \\ B & (0, 4) & (3, 0) & (3, 3) \end{array} \quad (2.4)$$

Rút gọn kính thước ma trận trò chơi bimatrix

- Khi đã quan sát trò chơi rút gọn (2.4), ta thử tìm kiếm khả năng chiến lược thuần M (dòng 2) lép vế - nghĩa là $p_2 = 0$ - trước một chiến lược hỗn hợp $\mathbf{p} = (p, 0, 1 - p)$ trong điều kiện p hợp lý nào đó.
- Ta áp dụng điều kiện của tính trội tuyệt đối cho (A) để thiết lập các bất đẳng thức cho điều kiện của p phù hợp. Nếu tồn tại p như vậy, ta khẳng định rằng M lép vế trước chiến lược hỗn hợp $\mathbf{p}$ như giả định. Do NC1 (tương ứng (A)) chơi theo hàng, nên cần so sánh với $\mathbf{e}^2 A \mathbf{e}^j$ với j lần lượt nhận các giá trị 1, 2, 3 chính là (1, 2, 1); đây chính là dòng M của (A) .
- Sau đó, ta tính $\mathbf{p} A \mathbf{e}^j$ và so sánh từng hàng lần lượt với các phần tử của M nói trên, để thu được hệ bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} p \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 &> 1 \\ p \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (1 - p) \cdot 3 &> 2 \\ p \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (1 - p) \cdot 3 &> 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2p &> 1 \\ 3 - p &> 0 \\ 2 &> 3p \end{aligned}$$

Rút gọn kính thước ma trận trò chơi bimatrix

Bất đẳng thức thứ 2 của hệ này tầm thường. Từ 2 bất đẳng thức còn lại, ta thu được điều kiện cho p là: $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$. Điều này khẳng định việc loại bỏ M khỏi chiến lược thuần của NC1, và tiếp tục rút gọn (2.4) trở thành (2.5)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} W & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2, 2 & 2, 2 & 0, 0 \\ 0, 4 & 3, 0 & 3, 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad (2.5)$$

Ngay lập tức, ở trò chơi mới (2.5) ta nhận thấy trong (B) xuất hiện W có tính trội tuyệt đối so với Z do đó, ta tiếp tục loại chiến lược Z của (2.5), và ta đã rút gọn về trò chơi () kích thước 2×2 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} W & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2, 2 & 2, 2 \\ 0, 4 & 3, 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (2.6)$$

Rút gọn kính thước ma trận trò chơi bimatrix

$$\beta_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{nếu } 0 \leq q < \frac{1}{3} \\ \{(p, 1 - p) | 0 \leq p \leq 1\} & \text{nếu } q = \frac{1}{3} \\ \{(0, 1)\} & \text{nếu } \frac{1}{3} < q \leq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

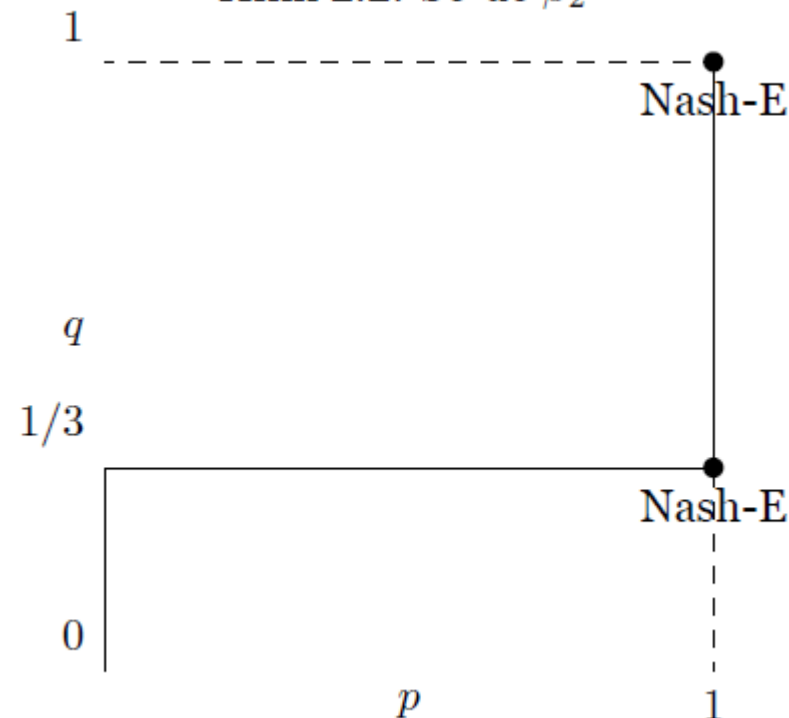
$$\beta_2(p, 1 - p) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{nếu } 0 \leq p < 1 \\ \{(q, 1 - q) | 0 \leq q \leq 1\} & \text{nếu } p = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ta có sơ đồ hình học biểu diễn hai hàm phản ứng tối ưu của NC1, NC2 trong H.(2.2) dưới đây.

Sơ đồ này cho biết vô số cân bằng Nash là phản ứng tối ưu có thể tìm thấy do toàn bộ đoạn thẳng nối hai điểm tròn (trên sơ đồ) đều thỏa mãn các tính chất mong muốn. Như vậy, tập hợp các chiến lược hỗn hợp là tập các PPXS sau: $\{((1, 0), (q, 1 - q)) | \frac{1}{3} \leq q \leq 1\}$.

Từ đây, ta suy ra tập các cân bằng Nash ở dạng của trò chơi bimatrix ban đầu (nghĩa là khi chưa rút gọn) sẽ có dạng: $\{((1, 0, 0), (q, 0, 1 - q, 0)) | \frac{1}{3} \leq q \leq 1\}$.

Hình 2.2: Sơ đồ β_2



3.3. ỨNG DỤNG MINH HỌA

Ứng dụng 1: Hai công ty nhựa Hồ Tây và Trúc Bạch trực tiếp cạnh tranh trên địa bàn Hà Nội cân nhắc việc sản xuất sử dụng ghế ngoài trời và trong nhà. Cả hai mặt hàng ghế thúc đẩy doanh số hàng hóa nhựa. Nếu cả 2 công ty cùng sản xuất ghế ngoài trời, thì mỗi công ty hưởng lợi 2 tỷ. Nếu cả hai cùng sản xuất ghế trong nhà, thì lợi ích đem lại cho mỗi công ty là 1 tỷ. Nếu hai công ty lựa chọn loại ghế khác nhau, thì mỗi công ty thiệt hại 1 tỷ.

Yêu cầu: Dựng trò chơi bimatrix cho ứng dụng này. Giải tập hợp toàn bộ các điểm cân bằng Nash của trò chơi.

Ứng dụng 2: Trò chơi phúc lợi. Một chính phủ có kế hoạch hỗ trợ tài chính cho nông dân tăng việc làm và thu nhập. Giả sử nông dân chỉ tìm kiếm cơ hội tăng việc làm và thu nhập từ công việc nếu không có nguồn phúc lợi do chính phủ hỗ trợ. Nông dân cũng có thể thất bại trong việc cố gắng mở rộng cơ hội việc làm và thu nhập. Lợi ích tương ứng cho CP và ND là 3,2 nếu CP cấp phúc lợi và ND cố gắng tìm kiếm thêm cơ hội việc làm; là -1,1 nếu CP không hỗ trợ và ND vẫn nỗ lực tự tìm kiếm việc làm; và -1,3 nếu CP hỗ trợ và ND không nỗ lực; và 0,0 trong trường hợp CP không hỗ trợ và ND cũng không cố gắng vận động.

Yêu cầu: Dựng mô hình trò chơi bimatrix. Xác định tập các điểm cân bằng Nash thể hiện chiến lược phản ứng tối ưu giữa CP và ND.

Bài tập 8: Loại bỏ chiến lược lép vế. Cho ma trận bimatrix sau

$$\begin{array}{c} \\ T \\ B \end{array} \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \\ \left(\begin{array}{cccc} 6, 6 & 4, 4 & 1, 2 & 8, 5 \\ 4, 5 & 6, 6 & 2, 8 & 4, 4 \end{array} \right) \end{array} \quad (2.9)$$

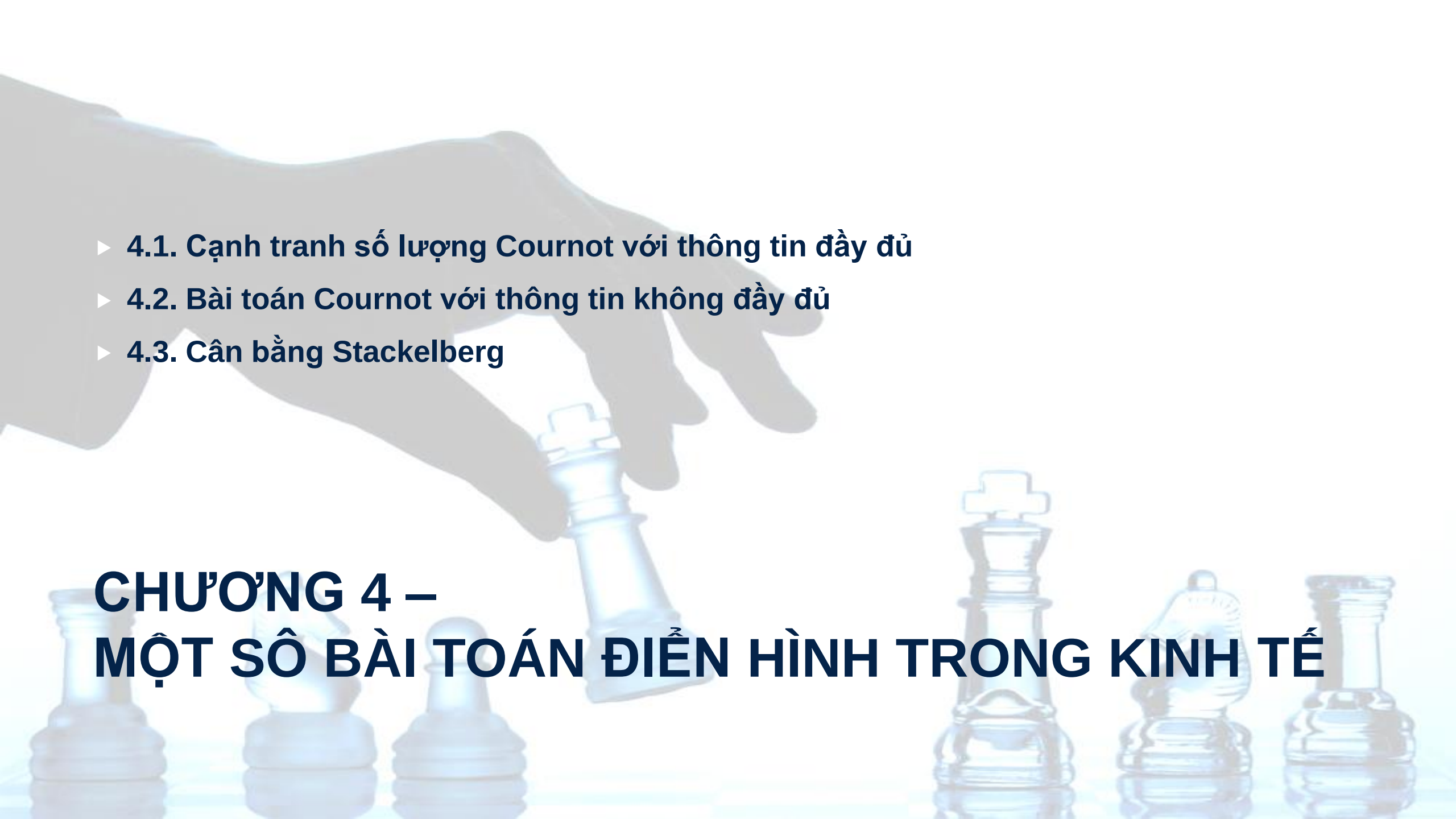
Tìm các chiến lược thuần của NC1 và NC2 bị lép vế so với một chiến lược thuần khác. Xác định các tổ hợp giữa hai chiến lược thuần W, Y của NC2 có tính trội tuyệt đối so với X. Tìm các điểm cân bằng của trò chơi này.

Bài tập 9: Cân bằng Nash. Tìm các điểm cân bằng Nash của trò chơi bimatrix (2.10).

$$\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{ccc} W & X & Y \\ \left(\begin{array}{ccc} 2, 0 & 1, 1 & 4, 2 \\ 3, 4 & 1, 2 & 2, 3 \\ 1, 3 & 0, 2 & 3, 0 \end{array} \right) \end{array} \quad (2.10)$$

Bài tập 10: Trò chơi tham số. Trò chơi (2.11) có chứa tham số $a \in \mathbb{R}$. Xác định các cân bằng Nash cho mọi giá trị có thể của tham số a .

$$\begin{array}{c} \\ T \\ B \end{array} \begin{array}{cc} L & R \\ \left(\begin{array}{cc} 1, 1 & a, 0 \\ 0, 0 & 2, 1 \end{array} \right) \end{array} \quad (2.11)$$

- 
- A background image showing a hand moving a chess king piece on a chessboard. The hand is positioned over the king piece, which is being moved from its original square. Other chess pieces are visible in the background, including a queen, a rook, and a pawn.
- ▶ 4.1. Cạnh tranh số lượng Cournot với thông tin đầy đủ
 - ▶ 4.2. Bài toán Cournot với thông tin không đầy đủ
 - ▶ 4.3. Cân bằng Stackelberg

CHƯƠNG 4 – MỘT SÔ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH TRONG KINH TẾ

4.1. CẠNH TRANH SỐ LƯỢNG COURNOT VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ

Bài toán: Hai hãng sản xuất hàng hóa đồng nhất và cạnh tranh nhau về số lượng sản phẩm. Mỗi hãng cung cấp một lượng hàng này trên cùng thị trường. Giá cả tùy thuộc vào tổng cung: cung càng cao thì giá càng giảm. Lợi nhuận tính bằng tổng doanh thu trừ đi tổng chi phí.

- Đây là trò chơi có 2-NC, trong đó các chiến lược chơi là các mức cung cấp hàng hóa ra thị trường và các hàm lợi ích là các mức lợi nhuận.
- Xét trường hợp đơn giản: giá phụ thuộc tuyến tính vào tổng cung, và chi phí biên không đổi, trong khi đó tạm coi như chi phí cố định bằng 0.

Ta xét trò chơi có quy cách cụ thể như sau: (a) Tập NC là $N = \{1, 2\}$. (b) Mỗi NC $i = 1, 2$ có tập chiến lược tương ứng ký hiệu là $S_i = [0, \infty)$, với phần tử tiêu biểu q_i . (c) Hàm lợi ích của NC thứ i là $\Pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1, q_2) - cq_i$, với mọi $q_1, q_2 \geq 0$, trong đó

$$P(q_1, q_2) = \begin{cases} a - q_1 - q_2 & \text{nếu } q_1 + q_2 \leq a \\ 0 & \text{nếu } q_1 + q_2 > a \end{cases}$$

chính là giá thị trường của hàng hóa và c là chi phí biên, với $a > c \geq 0$.

4.1. CẠNH TRANH SỐ LƯỢNG COURNOT VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ

Một cân bằng Nash trong trò chơi này là cặp (q_1^C, q_2^C) , với $q_1^C, q_2^C \geq 0$, của các phản ứng tối ưu qua lại lẫn nhau, tức là: $\Pi_1(q_1^C, q_2^C) \geq \Pi_1(q_1, q_2^C)$, $\Pi_2(q_1^C, q_2^C) \geq \Pi_2(q_1^C, q_2)$ for all $q_1, q_2 \geq 0$.

Cân bằng Nash là giao điểm của hai hàm phản ứng tối ưu, thông qua giải đồng thời hệ $q_1 = (a - c - q_2)/2$ and $q_2 = (a - c - q_1)/2$; kết quả thu được là:

$$(q_1^C, q_2^C) = \left(\frac{a - c}{3}, \frac{a - c}{3} \right).$$

4.2. BÀI TOÁN COURNOT VỚI THÔNG TIN KHÔNG ĐẦY ĐỦ

Vẫn xét bài toán trên, và ta thay đổi một giả thiết rằng chi phí biên của hãng thứ 2 hoặc ở mức cao c_H , hoặc ở mức thấp c_L : $c_H > c_L \geq 0$. Hãng 2 biết thông tin về chi phí, nhưng hãng 1 chỉ biết c_H có xác suất ϑ , hoặc c_L xác suất $1 - \vartheta$. Chi phí của hãng 1 là c và là thông tin các bên đều biết. Như vậy, NC1 chỉ có một đặc trưng, còn NC2 có hai đặc trưng c_H và c_L . Trò chơi tương ứng được xác lập như sau:

a) Tập NC là $\{1, 2\}$. b) Tập chiến lược của NC1 là $[0, \infty)$ với phần tử điển hình q_1 , và của NC2 là $[0, \infty) \times [0, \infty)$ với phần tử (q_H, q_L) . Ở đây q_H là số lượng được lựa chọn nếu NC2 có đặc trưng c_H , và q_L là số lượng khi đặc trưng là c_L . c) Các hàm lợi ích của NC là các hàm kỳ vọng, có dạng: $\Pi_i(q_1, q_H, q_L) = \vartheta \Pi_i(q_1, q_H) + (1 - \vartheta) \Pi_i(q_1, q_L)$, với mọi $i = 1, 2$, trong đó $\Pi_i(\cdot, \cdot)$ là hàm lợi ích từ mô hình Cournot.

Để tìm cân bằng Nash (Bayes) trước tiên tính hàm phản ứng tối ưu của NC1, thông qua cực đại 1(q_1, q_H, q_L) trên khoảng $q_1 \geq 0$, với q_H và q_L coi như đã cho. Do đó, ta giải quyết bài toán:

$$\max_{q_1 \geq 0} \vartheta [q_1(a - c - q_1 - q_H)] + (1 - \vartheta) [q_1(a - c - q_1 - q_L)].$$

4.2. BÀI TOÁN COURNOT VỚI THÔNG TIN KHÔNG ĐẦY ĐỦ

$$q_1 = q_1(q_H, q_L) = \frac{a - c - \vartheta q_H - (1 - \vartheta)q_L}{2}. \quad (5.3)$$

Với NC2, ta xét với q_1 cho trước, bài toán có dạng:

$$\max_{q_H, q_L \geq 0} \vartheta[q_H(a - c_H - q_1 - q_H)] + (1 - \vartheta)[q_L(a - c_L - q_1 - q_L)].$$

$$q_H = q_H(q_1) = \frac{a - c_H - q_1}{2} \quad (5.4)$$

$$q_L = q_L(q_1) = \frac{a - c_L - q_1}{2}. \quad (5.5)$$

4.2. BÀI TOÁN COURNOT VỚI THÔNG TIN KHÔNG ĐẦY ĐỦ

Giải đồng thời hệ (5.3,5.4,5.5), cho ta nghiệm là cân bằng Nash. Nghiệm thu được là bộ 3:

$$\begin{aligned}q_1^C &= \frac{a - 2c + \vartheta c_H + (1 - \vartheta)c_L}{3} \\q_H^C &= \frac{a - 2c_H + c}{3} + \frac{1 - \vartheta}{6}(c_H - c_L) \\q_L^C &= \frac{a - 2c_L + c}{3} - \frac{\vartheta}{6}(c_H - c_L).\end{aligned}$$

4.3. CÂN BẰNG STACKELBERG

Xét lại trò chơi Cournot đầu tiên, bây giờ ta giả định tình huống khác đi (hàm lợi ích vẫn vậy) rằng, NC1 chuyển động trước, và NC2 quan sát rồi mới chuyển động tiếp theo.

Giả sử rằng $q_1 \leq a - c$ (ta cũng dễ dàng kiểm tra rằng, $q_1 > a - c$ không phải phương án tối ưu), thì NC1 sẽ tối đa hóa biểu thức sau:

$$q_1 \left(a - c - q_1 - \frac{(a - c - q_1)}{2} \right).$$

Giá trị cực đại đạt được khi $q_1 = (a - c)/2$, và do đó $q_2 = \beta_2(\frac{1}{2}(a - c)) = (a - c)/4$. Do vậy, cân bằng hoàn hảo của trò chơi con là: $q_1 = (a - c)/2$, $q_2 = \beta_2(q_1)$.

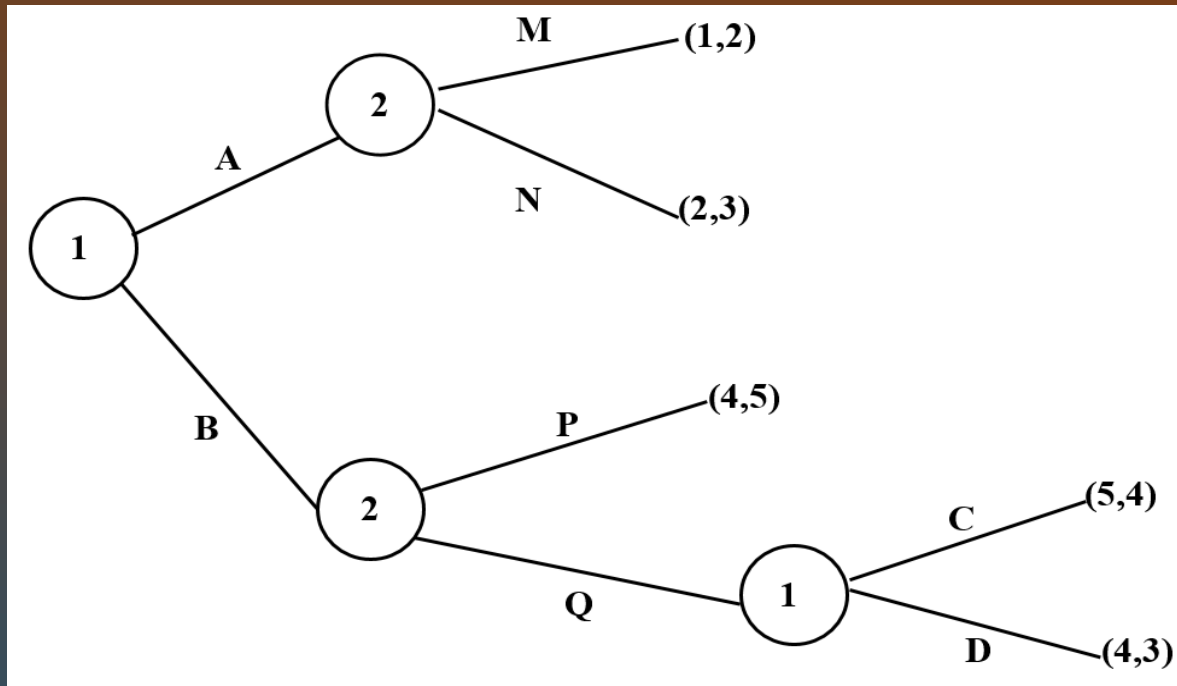
Kết cục cân bằng hoàn hảo trò chơi con theo định nghĩa là các hành động được lựa chọn dựa trên quỹ tích các điểm cân bằng ở dạng trò chơi chiến lược. Trong trường hợp này, kết cục đó là:

$$q_1^S = (a - c)/2, \quad q_2^S = (a - c)/4.$$

- 
- A background image showing a hand moving a chess piece. The hand is positioned as if it has just moved a piece or is about to. Several other chess pieces are visible on the board in the foreground and background, including a king, a queen, a knight, and a rook.
- ▶ 5.1. Trò chơi dạng mở rộng với thông tin đầy đủ
 - ▶ 5.2. Trò chơi dạng mở rộng với thông tin KHÔNG đầy đủ

CHƯƠNG 5 – TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG HỮU HẠN

5.1. TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ



- Trò chơi dạng mở rộng được đặc tả bằng nút và nhánh;
- Mỗi nút là một nút quyết định, hoặc nút kết thúc (đưa ra giá trị lợi ích với quy ước: giá trị đầu là của NC1, giá trị sau là của NC2);
- Mỗi nhánh tương ứng với mỗi hành động của người chơi;
- Hành động và chiến lược:
 - NC1 có các hành động là A,B,C,D
 - NC2 có các hành động là M,N,P,Q

- Chiến lược chơi là một dãy các hành động, trong đó tại mỗi tập thông tin của mỗi người chơi chỉ duy nhất một hành động được thực hiện;

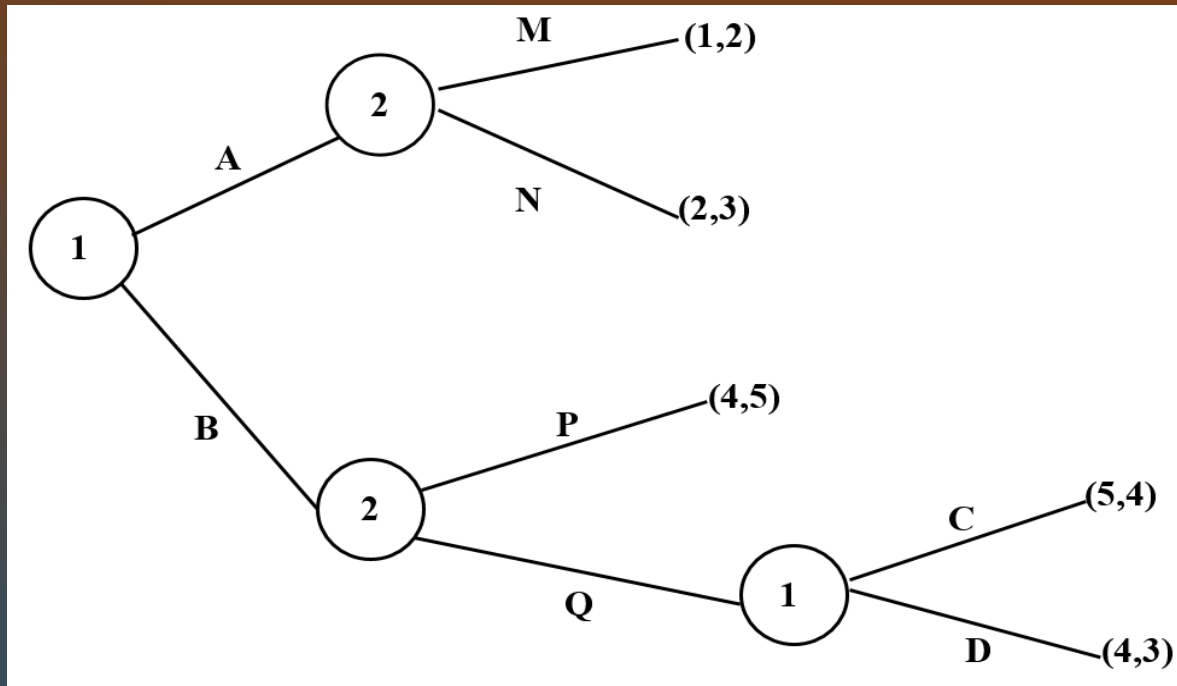
- Trong sơ đồ trên thì chiến lược chơi của NC1 đều có 2 hành động, bởi vì NC1 có 2 tập thông tin tầm thường:

Tập thông tin 1 có 2 hành động là A, B

Tập thông tin 2 có 2 hành động là C, D

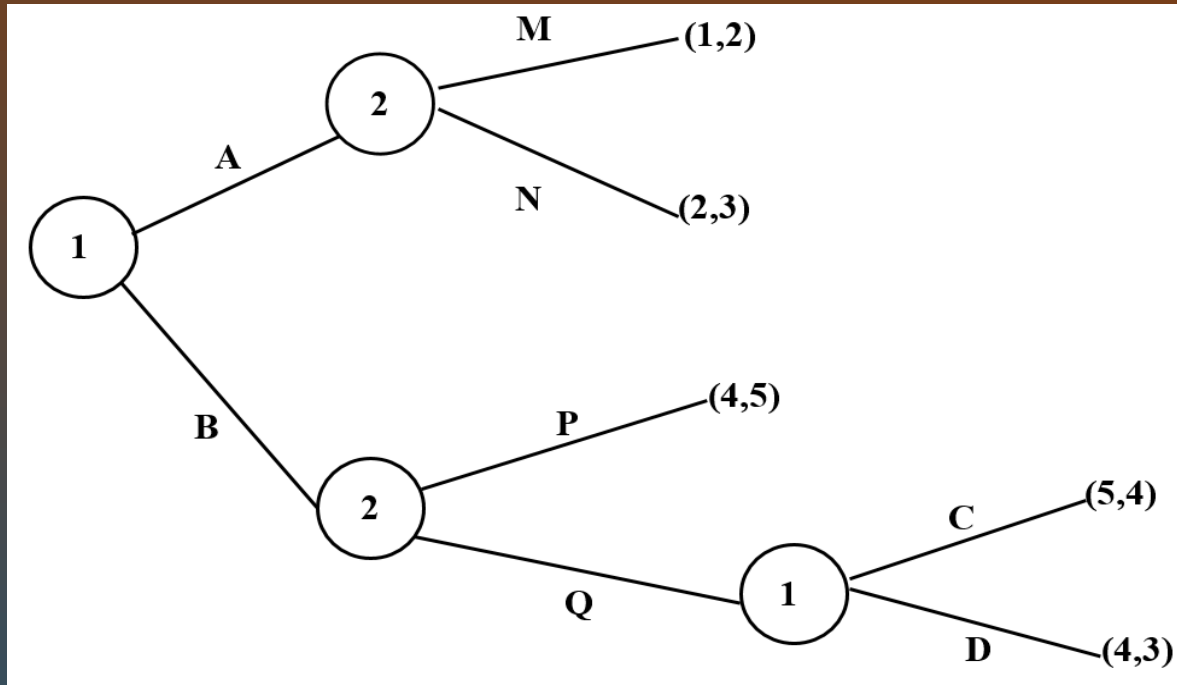
Suy ra tập chiến lược của NC1 là {AC, AD, BC, BD}

5.1. TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ



- Tương tự, đối với NC2 có 2 tập thông tin tầm thường:
Tập thông tin 1 có 2 hành động là M, N
Tập thông tin 2 có 2 hành động là P, Q
Suy ra tập chiến lược của NC2 là {MP, MQ, NP, NQ}

5.1. TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ

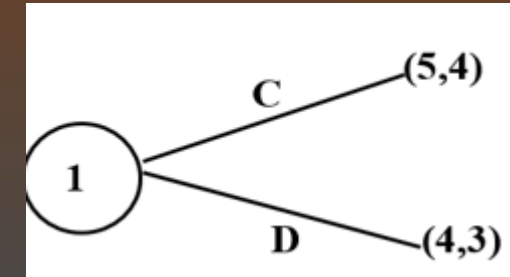


➤ Xác định cân bằng hoàn hảo trò chơi phụ:

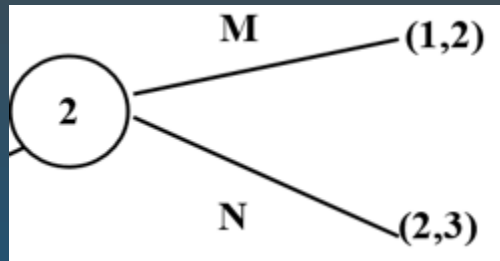
- Khái niệm trò chơi phụ: ở trò chơi bên có thể phân ra 4 trò chơi phụ

(1) là toàn bộ trò chơi

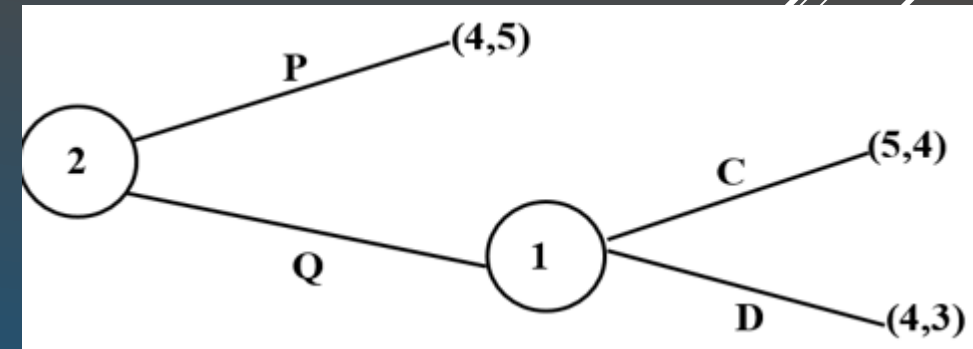
(2) là trò chơi



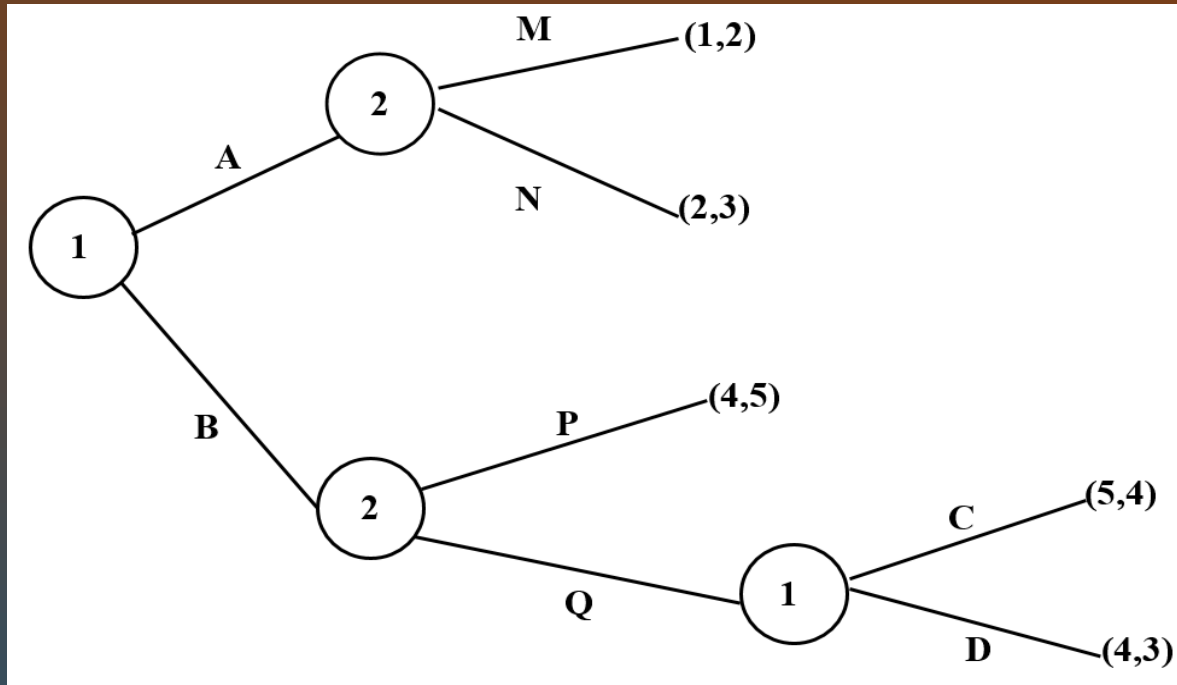
(3) là trò chơi



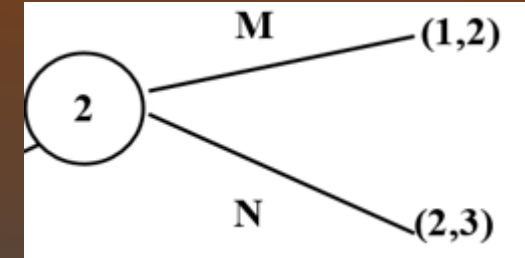
(4) là trò chơi



5.1. TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ

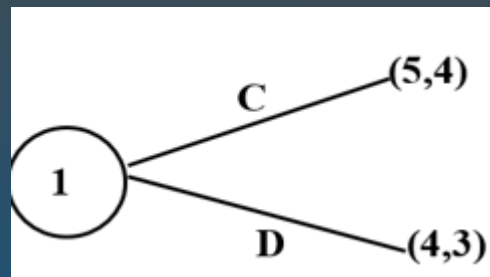


- Xác định cân bằng hoàn hảo trò chơi phụ: (đi từ ngọn về gốc)
Xét nhánh trên



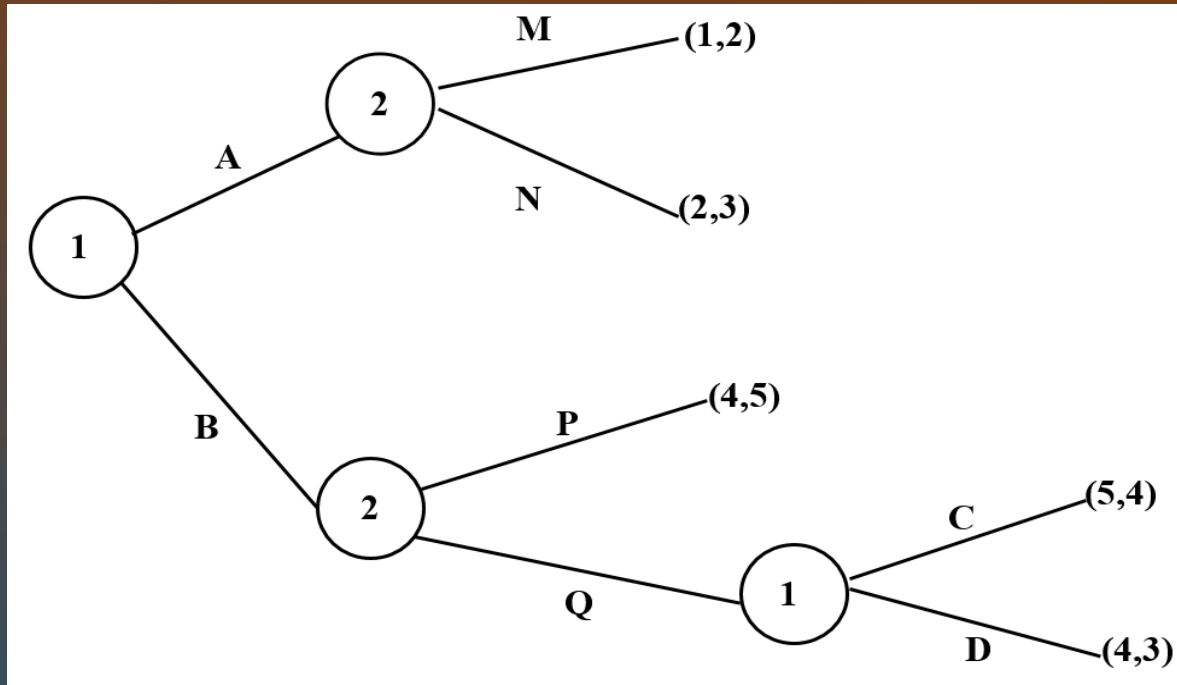
- Nếu NC2 chọn M thì thu hoạch là 2
- Nếu NC2 chọn N thì thu hoạch là 3
- > PU' TN của NC2 là N

Xét nhánh dưới:

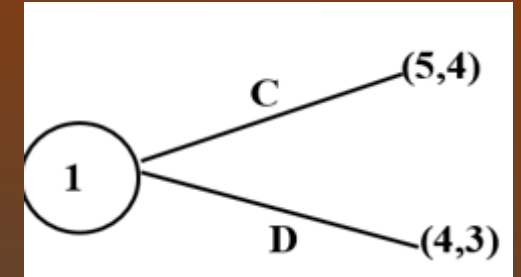


- Nếu NC1 chọn C thì thu hoạch là 5
- Nếu NC1 chọn D thì thu hoạch là 4
- > PU' TN của NC1 là C

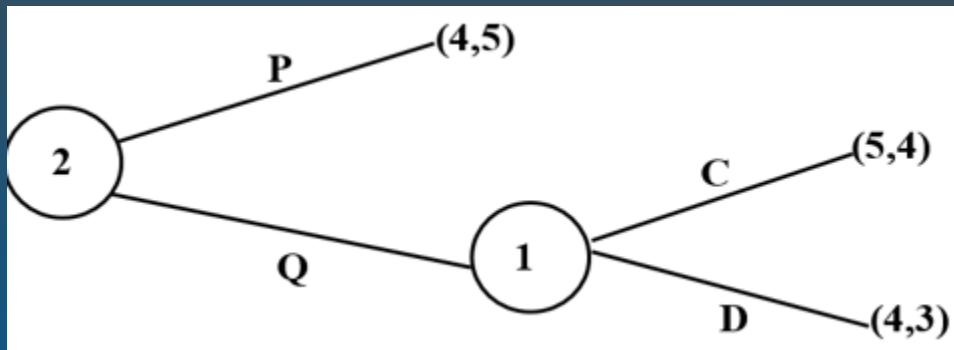
5.1. TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ



Xét nhánh dưới:



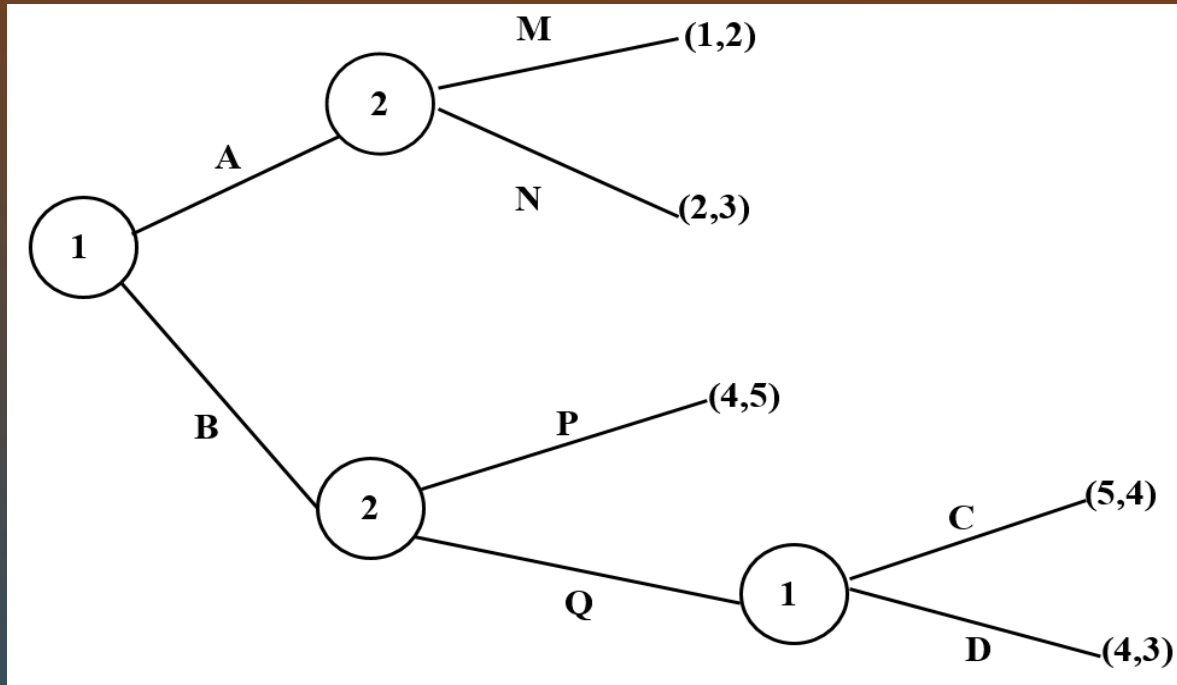
Nếu NC1 chọn C thì thu hoạch là 5
Nếu NC1 chọn D thì thu hoạch là 4
-> PƯ TN của NC1 là C



Đối với NC2:

Nếu NC2 chọn P thì thu hoạch là 5
Nếu NC2 chọn Q (ứng vs PƯ TN của NC1 là C ở trên) thì thu hoạch là 4
-> PƯ TN của NC2 là P

5.1. TRÒ CHƠI DẠNG MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN ĐẦY ĐỦ



Xét tại gốc:

Nếu NC1 chọn A thì thu hoạch là 2

Nếu NC1 chọn B thì thu hoạch là 4

-> PƯ TN của NC1 là B

Vậy cân bằng trò chơi phụ là (B,P)

➤ Đưa về trò chơi dạng Bimatrix và tìm cân bằng Nash:

Tập chiến lược của NC1 là {AC, AD, BC, BD}

Tập chiến lược của NC2 là {MP, MQ, NP, NQ}

	<i>MP</i>	<i>MQ</i>	<i>NP</i>	<i>NQ</i>
<i>AC</i>	1, 2	1, 2	2, 3	2, 3
<i>AD</i>	1, 2	1, 2	2, 3	2, 3
<i>BC</i>	4, 5	5, 4	4, 5	5, 4
<i>BD</i>	4, 5	4, 3	4, 5	4, 3

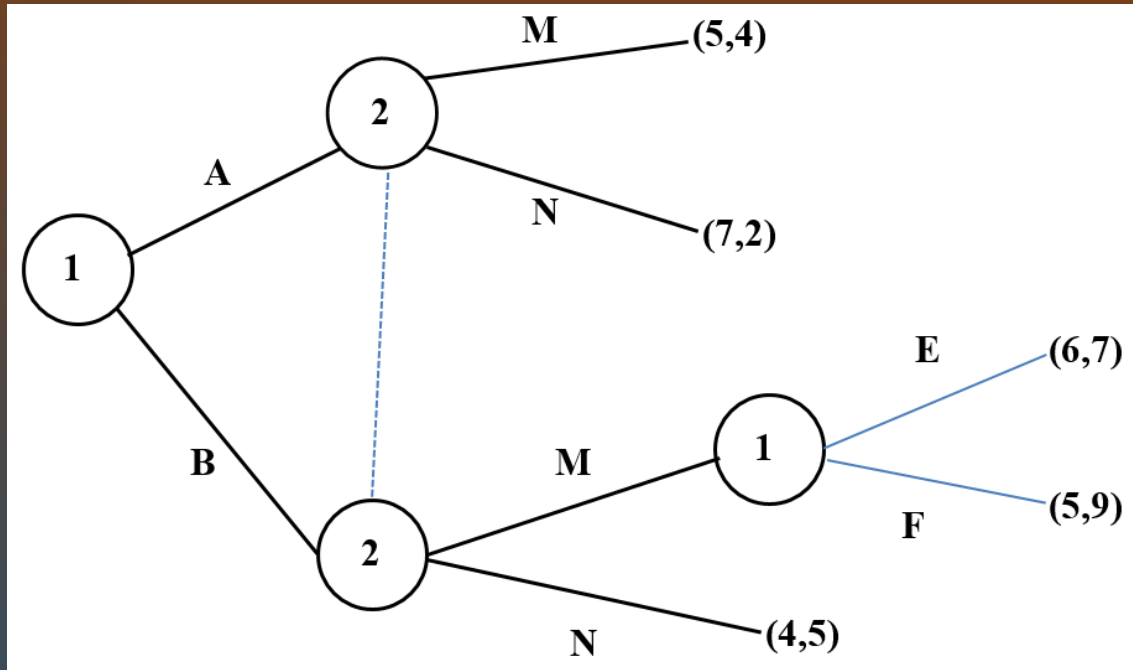


CB Nash là:

(BC, MP), (BC, NP)

(BD, MP), (BD, NP)

5.2. TRÒ CHƠI MỞ RỘNG VỚI THÔNG TIN KHÔNG ĐẦY ĐỦ



- Cặp 2 nút được nối bằng gạch đứt nét được gọi là tập thông tin KHÔNG tầm thường của NC2.
- Với tập thông tin này, NC2 không thể đoán biết bước chơi trước của NC1 là A hay B.

Xác định tập hợp các chiến lược có thể có của mỗi người chơi:

- Tập chiến lược của NC1 là:
 $\{AE, AF, BE, BF\}$
- Tập chiến lược của NC2 là $\{M, N\}$

- Nếu không có nét đứt (tức là bài toán với thông tin đầy đủ) thì tập chiến lược của NC2 là $\{MM, MN, NM, NN\}$

- Ma trận lợi ích và CB Nash:

	<i>M</i>	<i>N</i>
<i>AE</i>	5, 4	7, 2
<i>AF</i>	5, 4	7, 2
<i>BE</i>	6, 7	4, 5
<i>BF</i>	5, 9	4, 5



CB Nash là (BE, M)

BÀI TẬP VỀ CÂN BẰNG NASH-BAYES

- Một kĩ sư A đang lựa chọn giữa việc ứng tuyển vào công ty B hoặc mở doanh nghiệp riêng. Công ty B đang lựa chọn giữa việc thuê hoặc không thuê kĩ sư A. Tuy nhiên năng lực nghề nghiệp của người kĩ sư này là thông tin cá nhân chỉ anh ta biết. Công ty B chỉ biết được rằng A có năng lực kiểu 1 với xác suất là $1/3$ và có năng lực kiểu 2 với xác suất là $2/3$.
- Ma trận lợi ích được thể hiện trong các bảng sau:
(số đứng trước trong mỗi ô là lợi ích của A, số đứng sau là lợi ích của B)

Kiểu 1 (xác suất $1/3$)			Kiểu 2 (xác suất $2/3$)		
A \ B	B		A \ B	B	
	Thuê	Không thuê		Thuê	Không thuê
Lập doanh nghiệp	2,0	2,0	Lập doanh nghiệp	1,0	1,0
Nhận việc ở B	2,0	2,0	Nhận việc ở B	2,-1	1,0

Tổ hợp chiến lược (chiến lược của A; chiến lược của B) nào sau đây là cân bằng Nash Bayes chiến lược thuần (có thể có nhiều lựa chọn)? Giải thích.

- (Nhận việc ở B/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê)
- (Nhận việc ở B/Kiểu 1, Lập doanh nghiệp/ Kiểu 2; thuê)
- (Lập doanh nghiệp/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê)
- (Lập doanh nghiệp/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; thuê).

BÀI TẬP VỀ CÂN BẰNG NASH-BAYES

- Vì công ty B chỉ biết được rằng A có năng lực kiểu 1 với xác suất là $1/3$ và có năng lực kiểu 2 với xác suất là $2/3$, nên khi tính lợi ích của B thì phải tính theo xác suất

a) (Nhận việc ở B/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê)

Kiểu1 (xác suất 1/3)

A \ B	B	Thuê	Không thuê
Lập doanh nghiệp		2,0	2,0
Nhận việc ở B		2,0	2,0

Kiểu 2 (xác suất 2/3)

A \ B	B	Thuê	Không thuê
Lập doanh nghiệp		1,0	1,0
Nhận việc ở B		2,-1	1,0

- Nếu B chọn KHÔNG THUÊ thì:
- + A thuộc KIỂU 1 thì PU' TN của A là
 - Lập doanh nghiệp
 - Nhận việc
 - + A thuộc KIỂU 2 thì PU' TN của A là
 - Lập doanh nghiệp
 - Nhận việc

Suy ra “Nhận việc/kiểu 1, nhận việc/kiểu 2” là 1 trong các PU' TN của A

a) (Nhận việc ở B/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê)

- Nếu B chọn KHÔNG THUÊ thì:
- + A thuộc KIỂU 1 thì PU' TN của A là  Lập doanh nghiệp
Nhận việc
 - + A thuộc KIỂU 2 thì PU' TN của A là  Lập doanh nghiệp
Nhận việc

Kiểu 1 (xác suất 1/3)			Kiểu 2 (xác suất 2/3)		
A \ B			A \ B		
A	Thuê	Không thuê	A	Thuê	Không thuê
Lập doanh nghiệp	2,0	2,0	Lập doanh nghiệp	1,0	1,0
Nhận việc ở B	2,0	2,0	Nhận việc ở B	2,-1	1,0

Suy ra “Nhận việc/kiểu 1, nhận việc/kiểu 2” là 1 trong các PU' TN của A

- Ngược lại, nếu A chọn chiến lược “Nhận việc/kiểu 1, nhận việc/kiểu 2” thì:
- + Lợi ích kì vọng của B nếu B chọn KHÔNG THUÊ là: $1/3 \cdot 0 + 2/3 \cdot 0 = 0$
 - + Lợi ích kì vọng của B nếu B chọn THUÊ là: $1/3 \cdot 0 + 2/3 \cdot (-1) = -2/3$

Vậy PU' TN của B là KHÔNG THUÊ

Kết luận: tổ hợp chiến lược (Nhận việc ở B/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê) là một cân bằng Nash-Bayes

b) (Nhận việc ở B/Kiểu 1, Lập doanh nghiệp/ Kiểu 2; thuê)

- Nếu B chọn THUÊ thì:
 - + A thuộc KIỂU 1 thì PU' TN của A là  Lập doanh nghiệp
 - + A thuộc KIỂU 2 thì PU' TN của A là “Nhận việc”

Kiểu1 (xác suất 1/3)			Kiểu 2 (xác suất 2/3)		
A \ B			B		
			Thuê	Không thuê	
A	Lập doanh nghiệp	2,0	2,0	1,0	1,0
	Nhận việc ở B	2,0	2,0	2,-1	1,0

Suy ra “Nhận việc/kiểu 1, lập doanh nghiệp/kiểu 2” không phải là PU' TN của A

Kết luận: Tổ hợp chiến lược câu (b) không phải là một CB Nash-Bayes

c) (Lập doanh nghiệp/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê)

- Nếu B chọn KHÔNG THUÊ thì ... (giải thích giống câu a), do đó chiến lược “Lập doanh nghiệp/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2” là một trong các PU' TN của A
- Ngược lại, nếu A chọn chiến lược “Lập doanh nghiệp/kiểu 1, nhận việc/kiểu 2” thì:
 - + Lợi ích kì vọng của B nếu B chọn KHÔNG THUÊ là: $1/3*0 + 2/3*0 = 0$
 - + Lợi ích kì vọng của B nếu B chọn THUÊ là: $1/3*0 + 2/3*(-1) = - 2/3$

Vậy PU' TN của B là KHÔNG THUÊ

Kết luận: tổ hợp chiến lược (Lập doanh nghiệp/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; không thuê) là một cân bằng Nash-Bayes

d) (Lập doanh nghiệp/Kiểu 1, Nhận việc ở B/ Kiểu 2; thuê) không phải là CB Nash-Bayes